풀이

STEP I 1995, 문제 1

순수수학 • 다항식 부등식

> **STEP I 1995, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q1

핵심 아이디어

소문항 (i)은 항을 묶어서 인수분해(factorise)되는 삼차식(cubic)이고, 일단 세 일차식의 곱으로 나타내면 그 부호는 수직선(number line)에서 바로 읽어 낼 수 있다. 소문항 (ii)는 모습만 바꾼 같은 삼차식이다. 모든 항의 전체 차수(degree)가 3이므로, y^3으로 나누면 변수 x/y에 대한 소문항 (i)의 삼차식이 된다. 그러면 같은 인수분해로부터 원점(origin)을 지나는 세 직선을 얻고, 소문항 (iii)은 직선을 따라서가 아니라 원점 둘레로 그린 부호표(sign chart)가 된다.

풀이

소문항 (i)

항을 둘씩 묶으면

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - x + 4 &= x^2(x-4) - (x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-4). \end{aligned}$$

근(root)은 $-1, 1, 4$이다. 각 인수는 일차식이고 자기 근에서만 부호가 바뀌므로, 곱은 세 근 각각에서 부호가 바뀐다. x가 충분히 큰 양수이면 세 인수가 모두 양수이므로, 오른쪽부터 읽은 부호의 패턴은 다음과 같다.

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
부호	$-$	$+$	$-$	$+$

삼차식의 값이 0이 되는 근까지 포함하면, 부등식이 성립하는 것은 정확히

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{또는} \quad x \ge 4.$$

일 때이다.

소문항 (ii)

$f(x,y) = x^3 - 4x^2y - xy^2 + 4y^3$이라 하자. 이것은 소문항 (i)의 삼차식에서 각 항에 y의 거듭제곱을 곱해 차수를 3으로 맞춘 것이며, 같은 방식으로 묶을 수 있다.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2(x-4y) - y^2(x-4y) \\ &= (x-4y)(x-y)(x+y). \end{aligned}$$

곱이 0이 되는 것은 인수 중 하나가 0일 때뿐이므로, $f(x,y) = 0$인 곳은 세 직선

$$x = 4y \ (\text{즉} y = \tfrac{1}{4}x), \qquad y = x, \qquad y = -x,$$

이고, 이들은 모두 원점을 지난다.

? **생각해 보기** 왜 (ii)의 답이 (i)과 관련이 있어야 할까?

$y \neq 0$일 때 $t = x/y$로 놓자. 그러면 $f(x,y) = y^3\,(t^3 - 4t^2 - t + 4)$이고, 이는 소문항 (i)의 삼차식에 y^3을 곱한 것이다. 그 삼차식은 $t = -1, 1, 4$에서, 곧 $x = -y$, $x = y$, $x = 4y$ 위에서 0이 된다. ($y = 0$일 때 $f = x^3$은 원점에서만 0이 되는데, 원점은 이미 세 직선 위에 모두 있다.)

소문항 (iii)

세 직선은 평면을 원점에서 만나는 여섯 개의 부채꼴 영역(sector)으로 나눈다. 양의 x축에서 시계 반대 방향으로 재면, 여섯 개의 반직선은 다음 방향을 향한다.

$$\arctan \tfrac{1}{4} \approx 14^\circ, \quad 45^\circ, \quad 135^\circ, \quad 194^\circ, \quad 225^\circ, \quad 315^\circ.$$

한 영역 안에서는 f의 어떤 인수도 0이 아니므로, 그곳에서 f의 부호는 일정하다. 직선 하나를 건너면 정확히 한 인수의 부호가 바뀌므로(세 직선은 서로 다르고, 원점을 벗어나면 한 번에 하나의 직선만 건넌다), f의 부호는 이웃한 영역마다 번갈아 바뀐다.

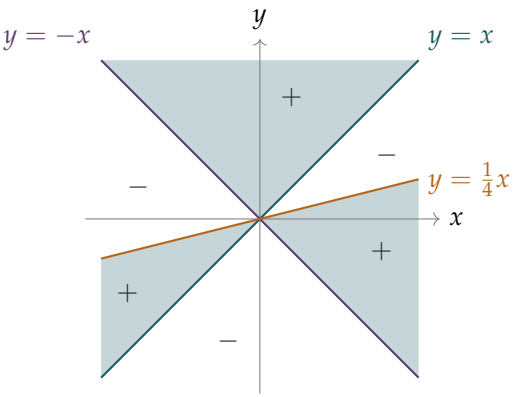
부호를 정하기 위해 $(1,0)$을 잡자. $f(1,0) = 1 > 0$이고, $(1,0)$은 315°와 14° 사이의 영역에 있다. 따라서 한 바퀴 돌면서 부호는 다음과 같다.

영역 (도)	$-45, 14$	$14, 45$	$45, 135$	$135, 194$	$194, 225$	$225, 315$
부호 f	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

확인 삼아 보면, 셋째 열에서 $f(0,1) = 4 > 0$이고 다섯째 열에서 $f(-3,-1) = 8 > 0$이다.

따라서 $f(x,y) \geq 0$인 곳은 아래 그림에서 색칠한 세 영역과 세 직선 전체($f = 0$인 곳)이다.

- 양의 x축을 포함하는 영역으로, $x > 0$에서 $y = -x$(아래)와 $y = \frac{1}{4}x$(위) 사이;
- 양의 y축을 포함하는 영역으로, $y > 0$에서 $y = x$와 $y = -x$ 사이;
- 제3사분면에서 $y = x$와 $y = \frac{1}{4}x$ 사이의 가느다란 영역.



생각해 보기 왜 그림을 원점을 중심으로 반 바퀴 돌리면 색칠만 서로 바뀌고 모양은 그대로일까?

f의 모든 항은 홀수 차수 3이므로 $f(-x,-y) = -f(x,y)$이다. 점을 원점을 중심으로 180° 회전하면 f의 부호가 뒤집히므로, 색칠한 영역마다 맞은편에 색칠하지 않은 영역이 놓인다. 이것은 어떤 그림이든 빠르게 검산하는 방법이 된다. 색칠한 영역과 색칠하지 않은 영역은 반드시 마주 보는 쌍으로 나타나야 하고, 실제로 그렇다.

검산

- 직선 $y = 1$ 위에서 $f(x,1)$은 정확히 소문항 (i)의 삼차식이므로, $y = 1$에서 색칠된 부분은 $-1 \leq x \leq 1$과 $x \geq 4$여야 한다. 그림에서 $y = 1$은 $y = -x$와 $y = x$ 사이($x = -1$부터 $x = 1$까지)에서 색칠되어 있고, $y = \frac{1}{4}x$와 만나는 $x = 4$에서 다시 색칠된 영역으로 들어간다.
- x축 위에서 $f = x^3$이고, 이는 정확히 $x \geq 0$일 때 음이 아니다. 실제로 양의 x축은 색칠되어 있고 음의 x축은 그렇지 않다.
- 수치적으로 2×10^5개의 무작위 점에서 f의 값을 계산했는데, 그 부호는 매번 여섯 영역의 부호표와 일치했다. 예를 들어 $f(1,0) = 1$, $f(0,-1) = -4$, $f(-3,-1) = 8$이다.

흔한 실수

- $y < 0$인데 y^3으로 나누면서 부등호 방향을 그대로 두는 것. 그곳에서는 $y^3 < 0$이므로 조건이 $t^3 - 4t^2 - t + 4 \leq 0$이 되며, 아래쪽 반평면이 위쪽과 달라 보이는 것도 이 때문이다.
- $y > 0$에 대해서만 소문항 (i)의 답을 이용해 색칠하고, $y < 0$은 아예 잊어버리는 것.
- 직선 자체를 빼먹는 것. 부등식에 등호가 포함되어 있으므로 직선도 영역에 속한다.

STEP 너머

모든 항의 차수가 같은 다항식을 **동차**(*homogeneous*) 다항식이라고 한다. 동차 다항식의 영점 집합은 원점을 지나는 직선들의 합집합이고, 그 부호는 방향에만 의존한다. 동차 다항식은 원점을 지나는 직선 하나 전체를 한 점으로 보는 사영기하학(projective geometry)의 출발점이며, 선형대수학(linear algebra) 강의에서 원뿔곡선(conic)과 이차형식(quadratic form)을 분류할 때 다시 등장한다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서 이차형식을 다루고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 STEP 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.