풀이

STEP III 1994, 문제 9

역학 • 등시곡선과 충돌

> **STEP III 1994, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q9

이 문제는 *Beyond STEP*의 11.4 절 **등시 곡선**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch11/tautochrone.html

핵심 아이디어

곡면을 따라 에너지 보존(energy conservation)을 적용하면 제1적분(first integral)을 얻고, 그릇의 모양 $y = s^2/(4k)$를 대입하면 이것은 호의 길이(arc-length) s에 대한 단순 조화 운동(simple harmonic motion)의 에너지 방정식이 된다. 단순 조화 운동의 주기(period)는 진폭(amplitude)에 의존하지 않으므로, 정지 상태에서 놓은 입자는 어디에서 출발하든 모두 같은 시간이 지난 뒤 V에 도달한다. 이 때문에 마지막 부분의 두 입자는 반드시 V에서 만나고, 이후에도 거듭해서 만난다.

풀이

상수

입자를 매끄러운 곡면 위의 질점(point mass)으로 모형화한다. 입자에는 무게와 수직항력(normal reaction)의 두 힘이 작용한다. 입자는 정지 상태에서 출발하므로, 처음 속도에는 출발점과 축을 지나는 연직 평면에 수직인 수평 성분이 없다. 두 힘 모두 그 평면에 수직인 성분이 없으므로(축대칭(axially symmetric) 곡면의 수직항력은 축을 지나는 평면 안에 놓인다), 입자는 그 연직 단면 안에 머문다. 입자는 곡선 $s = 2\sqrt{ky}$를 따라 속력 $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|$로 움직인다.

곡면이 매끄러우므로 수직항력은 속도에 수직이고 일을 하지 않는다. 일을 하는 것은 중력

뿐이므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다.

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgy = \text{상수}.$$

양변에 $2/m$를 곱하면 $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2gy$가 상수임을 알 수 있고, 이것이 보여야 할 내용이다. 높이 h에서 정지 상태로 놓으면 이 상수는 $2gh$이다.

V에 도달하는 시간

곡선 위에서 $y = s^2/(4k)$이다. 이를 대입하면

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{g}{2k}s^2 = 2gh.$$

t에 대하여 미분하고 $2\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$로 나누면(입자가 움직이는 동안에는 가능하다)

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{2k}s,$$

를 얻는다. 이것은 s에 대한 단순 조화 운동으로, $\omega^2 = \dfrac{g}{2k}$이고 중심은 $s = 0$, 즉 점 V이다.

생각해 보기 놓은 순간부터 V에 이르기까지의 시간이 왜 주기의 4분의 1인가?

입자는 끝점 $s_0 = 2\sqrt{kh}$에서 정지 상태로 출발하므로 $s = s_0\cos\omega t$이다. 입자가 처음으로 $s = 0$에 도달하는 것은 $\omega t = \frac{\pi}{2}$일 때이고, 이는 주기 $2\pi/\omega$의 4분의 1이다. 따라서 V에 도달하는 시간은

$$T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

이고, 이것이 보여야 할 내용이다. 이 값은 h에 의존하지 않는다. 즉 이 그릇은 **등시곡선**(*tautochrone*)이다.

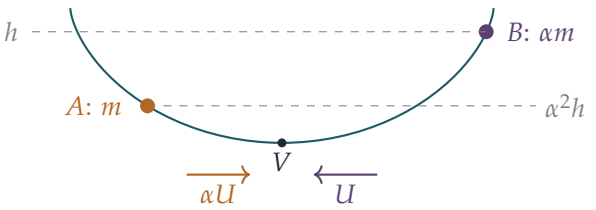
나중에 쓰기 위해 적어 두면, V에서의 속력은 ωs_0이고, 에너지 방정식에 $y = 0$을 넣어 직접 구하면 $\sqrt{2gh}$이다.

두 입자

두 입자를 V에서 정면으로 충돌하는 질점으로 다룬다. 그 점에서 접선은 수평이므로 충돌은 수평선을 따라 일어난다. 질량 m인 입자를 입자 A(높이 α^2h에서 놓음), 질량 αm인 입자를 입자 B(반대쪽 높이 h에서 놓음)라 하자.

두 입자는 V에서 만난다. 앞 부분에 의해 각 입자는 출발 높이와 관계없이 시간 T가 지난 뒤 V에 도달한다. 두 입자를 동시에 놓으므로 둘은 동시에 V에 도착하고, 시각 T에 그곳에서 충돌한다.

충돌 직전의 속력. $U = \sqrt{2gh}$라 쓰자. 에너지 방정식에서 A는 속력 $\sqrt{2g\alpha^2 h} = \alpha U$로, B는 속력 U로 서로 반대 방향으로 움직이며 도착한다. A의 운동 방향을 양의 방향으로 잡는다.



충돌 전의 운동량은

$$m(\alpha U) + \alpha m(-U) = 0.$$

이다. 질량과 높이를 이렇게 고른 이유가 바로 이것이다.

첫 번째 충돌 후. 충돌 후의 속도를 v_A, v_B라 하자. 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴(Newton)의 실험 법칙(Newton's experimental law)에서

$$mv_A + \alpha m\, v_B = 0, \qquad v_B - v_A = \alpha\big(\alpha U - (-U)\big) = \alpha(1+\alpha)U.$$

첫 번째 식에서 $v_B = -v_A/\alpha$이다. 이를 두 번째 식에 대입하면 $-v_A(1+\alpha)/\alpha = \alpha(1+\alpha)U$이므로

$$v_A = -\alpha^2 U, \qquad v_B = \alpha U.$$

두 속도 모두 방향이 반대로 바뀌고 크기에 α가 곱해진다. (전체 운동량이 0이므로 상대 속도와 각각의 속도가 모두 $-\alpha$배가 된다.) 따라서 각 입자는 그릇의 **자기** 쪽으로 다시 올라간다. 에너지 보존에 의해 A는 높이 $\alpha^4 h$까지, B는 높이 $\alpha^2 h$까지 올라간다.

같은 양상이 반복된다. 두 입자는 충돌 후 시간 T가 지난 같은 순간에 각자의 새로운 최고점에서 정지한다. 그런 다음 각각 다시 시간 T가 걸려 V로 돌아온다. 따라서 두 입자는 시각 $3T$에 V에서 다시 충돌하는데, 이때 A는 높이 $\alpha^4 h$에서, B는 높이 $\alpha^2 h$에서 내려온다. 이것은 처음 배치에서 h를 $\alpha^2 h$로 바꾼 것과 정확히 같다. 다시 전체 운동량은 0이고, 다시 두 속도 모두 방향이 바뀌고 α배가 된다.

수학적 귀납법(induction)에 의해 n번째 충돌은 시각 $(2n-1)T$에 V에서 일어나고, 그 후

$$A\text{가 올라가는 높이: } \alpha^{2n+2}h, \qquad B\text{가 올라가는 높이: } \alpha^{2n}h,$$

이며, 각 입자는 자신이 출발한 그릇의 쪽에서 올라간다. 두 입자는 각자의 쪽에서 진동하고, 같은 간격의 시각 $T, 3T, 5T, \ldots$에 V에서 충돌한다. 충돌할 때마다 속력은 α배로 줄어들므로 높이는 α^2배로 줄어들고, 운동 에너지의 $1-\alpha^2$만큼의 비율이 손실된다. 충돌 사이의 간격이 항상 $2T$이므로 충돌은 결코 멈추지 않는다. 진폭은 등비수열로 줄어들고, 두 입자는 $t \to \infty$일 때 V에서 정지 상태에 가까워지지만 유한한 시간 안에 그곳에 도달하지는 않는다.

검산

- 차원(dimensions): ($s^2 = 4ky$이므로) k는 길이이고, 따라서 $\sqrt{k/g}$는 시간이다.
- 임의의 k와 h에 대해 $\int_0^{s_0} \mathrm{d}s/\sqrt{2g(h-y)}$를 수치 적분(quadrature)으로 계산하였다. $k = 1$, $g = 9.81$일 때 그 값은 h와 관계없이 $0.7092\ldots = \pi\sqrt{1/19.62}$이다.
- 두 입자의 운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하고($\alpha = 0.6$과 $\alpha = 0.3$), 만날 때마다 충돌 법칙을 적용하였다. 충돌은 $t/T = 1, 3, 5, 7$에서 일어났고, 언제나 V에서, 전체 운동량이 0인 상태로 일어났다. $\alpha = 0.6$일 때 첫 번째 충돌 후의 높이는 $0.1296h = \alpha^4 h$와 $0.36h = \alpha^2 h$였다.
- 극한의 경우 $\alpha \to 1$: 같은 질량이 같은 높이에서 출발하고 완전 탄성(perfectly elastic) 충돌을 하므로, 예상대로 각 입자는 영원히 출발 높이까지 되튀어 오른다.

흔한 실수

- V가 출발점에서 반주기 떨어져 있다고 생각하는 것: 입자는 진동의 끝점에서 출발하므로 V까지는 4분의 1 주기이다.
- 뉴턴의 법칙에서 방향이 반대로 바뀌는 것을 잊는 것: 속력만이 아니라 부호가 있는 속도를 사용해야 한다.
- 유한 번의 충돌 후 입자들이 정지한다고 주장하는 것. 충돌 사이의 간격은 (바닥에서 튀는 공과 달리) 줄어들지 않고 일정하므로, 무한한 시간에 걸쳐 무한히 많은 충돌이 일어난다.

STEP 너머

내재 방정식(intrinsic equation) $s^2 = 4ky$는 사이클로이드(cycloid)를 나타낸다. 이 문제는 하위헌스(Huygens)의 등시곡선을 다시 발견하는 것이다. 즉 뒤집힌 사이클로이드 위에서는 바닥까지 미끄러져 내려가는 시간이 출발점에 의존하지 않는다. 하위헌스는 이를 이용하여 주기가 흔들림의 크기에 의존하지 않는 진자시계를 설계하였다. 같은 곡선은 가장 빨리 내려가는 곡선인 최속강하곡선(brachistochrone)이기도 한데, 이는 대학 2학년 역학의 표준 주제인 변분법(calculus of variations)으로 구한다. 진동과 충돌에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.