풀이

STEP III 1994, 문제 8

순수수학 • 네 제곱수 항등식

STEP III 1994, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.8 절 **네 제곱수**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/four-squares.html

핵심 아이디어

$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ 꼴의 행렬(matrix)의 행렬식(determinant)은 $zz^* + ww^* = |z|^2 + |w|^2$이고, 이는 네 개의 실수 제곱의 합이다. a, b, c, d를 이런 행렬 하나에, p, q, r, s를 또 다른 행렬에 담으면 $\det(AB) = \det A \det B$로부터 좌변을 얻는다. 해야 할 일은 곱 AB도 같은 특수한 꼴임을 보이는 것이다. 그러면 그 행렬식도 네 제곱의 합이 되고, 그 제곱들이 바로 L_i^2이다.

풀이

준비

복소수(complex number) z와 w에 대하여

$$M(z,w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}, \qquad \det M(z,w) = zz^* - w(-w^*) = |z|^2 + |w|^2.$$

이라 하자. 다음과 같이 잡는다.

$$z_1 = a + b\mathrm{i}, \quad z_2 = c + d\mathrm{i}, \quad z_3 = p + q\mathrm{i}, \quad z_4 = r + s\mathrm{i}.$$

그러면

$$\det M(z_1, z_2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \qquad \det M(z_3, z_4) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

이다.

곱도 같은 꼴이다

곱을 전개하면

$$M(z_1, z_2)\, M(z_3, z_4) = \begin{pmatrix} z_1 z_3 - z_2 z_4^* & z_1 z_4 + z_2 z_3^* \\ -z_2^* z_3 - z_1^* z_4^* & -z_2^* z_4 + z_1^* z_3^* \end{pmatrix}.$$

이다. 첫째 행의 성분을 $w_1 = z_1 z_3 - z_2 z_4^*$, $w_2 = z_1 z_4 + z_2 z_3^*$로 놓자. 곱의 켤레(conjugate)는 켤레들의 곱이고 $(z^*)^* = z$이므로

$$w_1^* = z_1^* z_3^* - z_2^* z_4, \qquad -w_2^* = -z_1^* z_4^* - z_2^* z_3,$$

이며, 이들은 정확히 오른쪽 아래 성분과 왼쪽 아래 성분이다. 따라서

$$M(z_1, z_2)\, M(z_3, z_4) = M(w_1, w_2).$$

이다.

생각해 보기 곱이 이런 특수한 모양을 가진다는 것이 왜 중요한가?

일반적인 2×2 복소 행렬의 행렬식은 전혀 제곱의 합이 아니다. 곱이 다시 $M(w_1, w_2)$ 꼴이기 때문에 비로소 그 행렬식이 $|w_1|^2 + |w_2|^2$이 되고, 이것이 네 개의 실수 제곱으로 나뉜다.

행렬식 취하기

$\det(AB) = \det A \, \det B$를 이용하면

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = \det M(w_1, w_2) = |w_1|^2 + |w_2|^2.$$

이다. 이제 w_1과 w_2의 실수부와 허수부를 구하면 된다.

$$\begin{aligned} w_1 &= (a + b\mathrm{i})(p + q\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i}) \\ &= \big[(ap - bq) + (aq + bp)\mathrm{i}\big] - \big[(cr + ds) + (dr - cs)\mathrm{i}\big] \\ &= (ap - bq - cr - ds) + (aq + bp + cs - dr)\mathrm{i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= (a + b\mathrm{i})(r + s\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i})(p - q\mathrm{i}) \\ &= \big[(ar - bs) + (as + br)\mathrm{i}\big] + \big[(cp + dq) + (dp - cq)\mathrm{i}\big] \\ &= (ar - bs + cp + dq) + (as + br - cq + dp)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

따라서

$$L_1 = ap - bq - cr - ds, \qquad L_2 = aq + bp + cs - dr,$$
$$L_3 = ar - bs + cp + dq, \qquad L_4 = as + br - cq + dp,$$

로 잡을 수 있고, 그러면 $|w_1|^2 + |w_2|^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2$이므로

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2.$$

을 얻는다. 각 L_i는 $(a, b, c, d$ 중 한 문자$) \times (p, q, r, s$ 중 한 문자$)$ 꼴의 항들의 합이므로, 요구된 대로 각 변수 묶음에 대하여 따로따로 일차식(linear)이다. (답은 유일하지 않다. L_i의 부호를 아무렇게나 바꾸거나 z_j를 다르게 잡으면 다른 올바른 답을 얻는다.)

검산

- $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$, $(p, q, r, s) = (5, 6, 7, 8)$로 두자. 좌변은 $30 \times 174 = 5220$이다. 공식에 따르면 $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (-60, 12, 30, 24)$이고, $3600 + 144 + 900 + 576 = 5220$이다.
- $c = d = r = s = 0$으로 두자. 그러면 $L_3 = L_4 = 0$이고 항등식은 $(a^2+b^2)(p^2+q^2) = (ap-bq)^2 + (aq+bp)^2$로 줄어드는데, 이는 $|z_1 z_3| = |z_1||z_3|$에서 나오는 두 제곱 항등식이다.
- 컴퓨터로 여덟 변수에 대한 20,000개의 무작위 유리수 값에서 항등식이 정확히 성립함을 확인했고, $M(z_1, z_2)M(z_3, z_4) = M(w_1, w_2)$도 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- 곱을 계산할 때 아래 행의 켤레를 빠뜨려서 곱의 특수한 꼴이 깨지는 경우.
- $(c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i})$에서의 부호 실수: 항 $-ds\,\mathrm{i}^2$은 $+ds$가 된다.

STEP 너머

이것은 오일러(Euler)의 네 제곱 항등식(four-square identity)이다. 행렬 $M(z, w)$는 해밀턴(Hamilton)의 사원수(quaternion)의 구체적인 모형이다. 이 행렬들은 곱셈에 대하여 닫혀 있고, 행렬식은 "길이"의 제곱으로서 곱셈적(multiplicative)이다. 이 항등식은 모든 양의 정수가 네 제곱수의 합이라는 라그랑주(Lagrange)의 정리에서 핵심 단계인데, 문제를 소수(prime)의 경우로 줄여 주기 때문이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 제곱수의 합을 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 두 제곱의 경우에 대한 기하학적 직관을 제공한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.