풀이

STEP III 1994, 문제 7

순수수학 • 군 동형사상

STEP III 1994, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q7

핵심 아이디어

두 군이 동형(isomorphic)이 되려면 동형사상(isomorphism)이 보존하는 모든 구조적 성질을 공유해야 한다. 그런 성질 가운데 가장 쓸모 있는 두 가지는 원소의 위수(order) 목록과, 군이 가환(commutative)인지, 곧 아벨군(abelian)인지의 여부이다. 위수를 나열하는 것만으로도 S_3와 Z_6는 이미 구별된다. 두 군이 동형임을 증명하려면 구체적인 전단사(bijection)를 하나 적고 그것이 연산을 보존하는지 확인한다. 마지막 부분은 가환성 문제로 귀결된다. 복소수로 이루어진 군은 모두 아벨군이지만, S_3는 그렇지 않다.

풀이

S_3와 Z_6의 원소

세 대상에 $1, 2, 3$이라는 이름을 붙이고 순환 표기(cycle notation)를 쓴다. 합성은 오른쪽에서 왼쪽으로 하므로, $\sigma\tau$는 "먼저 τ를 하고, 그다음 σ를 한다"는 뜻이다. 여섯 개의 치환(permutation)은 다음과 같다.

S_3의 원소	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
위수	1	2	2	2	3	3

호환(transposition)은 두 대상을 맞바꾸고, 두 번 하면 모든 것이 제자리로 돌아오므로 위수가 2이다. (123)과 같은 3-순환(3-cycle)은 $1 \to 2 \to 3 \to 1$로 보내므로, 각 대상이 제자리로 돌아오려면 세 번 적용해야 하고, 따라서 위수가 3이다.

$Z_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$에서 항등원(identity)은 0이고, a의 위수는 $na \equiv 0 \pmod 6$을 만족하는 가장 작은 $n \geq 1$이며, 이는 $6/\gcd(a, 6)$이다.

Z_6의 원소	0	1	2	3	4	5
위수	1	6	3	2	3	6

예를 들어 $4+4=8\equiv 2$이고 $4+4+4=12\equiv 0$이므로 4의 위수는 3이다.

S_3와 Z_6는 동형인가?

아니다. 동형사상 θ는 위수를 보존한다. g의 위수가 n이면 $\theta(g)^k=\theta(g^k)$이고, θ가 단사(injective)이므로 이것이 항등원이 되는 것은 정확히 g^k가 항등원일 때이다. 따라서 동형인 두 군은 각 위수의 원소를 같은 개수만큼 가진다. 그런데 Z_6에는 위수가 6인 원소가 두 개 있고 S_3에는 하나도 없으므로, 두 군은 동형이 아니다. (위수가 2인 원소의 개수도 다르다. S_3에는 세 개가 있고 Z_6에는 하나뿐이다.)

두 번째 이유도 있는데, 이것은 마지막에 다시 쓴다. 덧셈은 가환이므로 Z_6는 아벨군이다. 반면 S_3는 그렇지 않다.

$$(12)(13)=(132),\qquad (13)(12)=(123).$$

첫 번째 곱에서 (13)은 $1\to 3$으로 보내고 그다음 (12)는 3을 고정하므로 $1\to 3$이다. 마찬가지로 $3\to 2, 2\to 1$이다. 동형사상은 서로 교환되는 쌍을 서로 교환되는 쌍으로 옮기므로, 비가환군은 아벨군과 동형일 수 없다.

C_6는 Z_6와 동형이다

$k=0,1,\dots,5$에 대하여 $\phi(k)=\alpha^k$로 $\phi: Z_6\to C_6$를 정의한다.

- **전단사.** $k=0,\dots,5$에 대한 수 $\alpha^k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/3}$의 편각은 $0,\frac{\pi}{3},\dots,\frac{5\pi}{3}$이다. 이들은 $[0,2\pi)$ 안의 서로 다른 각이므로, 여섯 값은 단위원 위의 서로 다른 점이다. 따라서 ϕ는 단사이고, 크기가 6인 두 집합 사이의 사상이므로 전단사이다.
- **연산.** $a,b\in Z_6$라 하고, $r=(a+b) \bmod 6$으로 하여 $a+b=6q+r$로 쓴다. $\alpha^6=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}=1$이므로

$$\phi(a)\,\phi(b)=\alpha^a\alpha^b=\alpha^{a+b}=(\alpha^6)^q\alpha^r=\alpha^r=\phi\big((a+b) \bmod 6\big).$$

따라서 ϕ는 mod 6 덧셈을 복소수 곱셈으로 바꾸며, 동형사상이다. 그러므로 $C_6\cong Z_6$이다. 확인 삼아 보면, α와 α^5(1과 5의 상)는 위수가 6이고, α^2와 α^4는 위수가 3이며, $\alpha^3=-1$은 위수가 2이므로, Z_6의 표와 일치한다.

S_3와 동형인 $\mathbb{C}$의 부분군이 있는가?

생각해 보기 복소수로 이루어진 **모든** 군이 공유하는 성질은 무엇인가?

이들은 모두 아벨군이다. $(\mathbb{C}, +)$의 부분군(subgroup) H는 모든 복소수 z, w에 대하여 $z + w = w + z$이므로 아벨군이다. 곱셈에 대한 0이 아닌 복소수들의 부분군 H는 $zw = wz$이므로 아벨군이다. 부분군은 큰 군과 같은 연산을 쓰므로 가환성을 물려받는다.

이제 그러한 어떤 H에 대하여 동형사상 $\theta : S_3 \to H$가 있다고 하자. 위에서 본 서로 교환되지 않는 쌍에 이를 적용한다. H가 아벨군이므로

$$\theta\big((12)(13)\big) = \theta(12)\,\theta(13) = \theta(13)\,\theta(12) = \theta\big((13)(12)\big),$$

이다(곱셈으로 적었으며, 덧셈의 경우에는 곱을 합으로 바꾸면 된다). θ가 단사이므로 이로부터 $(12)(13) = (13)(12)$를 얻게 되는데, 이는 거짓이다. 따라서 복소수의 부분군은 덧셈에 대한 것이든 곱셈에 대한 것이든 **어느 것도** S_3와 동형이 아니다.

검산

- 각 군에서 위수는 6의 약수이다(라그랑주 정리(Lagrange's theorem)). S_3에서는 $1, 2, 3$, Z_6에서는 $1, 2, 3, 6$이다.
- 컴퓨터로 S_3, Z_6, C_6의 모든 위수를 다시 계산하고, $(12)(13) \neq (13)(12)$임을 확인했으며, 36개의 모든 쌍 (a, b)에 대하여 $\alpha^{(a+b) \bmod 6} = \alpha^a \alpha^b$를 10^{-12} 이내의 오차로 수치적으로 확인했다.

흔한 실수

- "둘 다 원소가 여섯 개이므로 동형이다"라고 말하는 것. 크기가 같은 것은 필요조건이지만 충분조건과는 거리가 멀다.
- S_3에서 위수가 3인 원소가 (12)와 (13)이라고 말하는 것. 호환의 위수는 2이고, 위수가 3인 것은 3-순환뿐이다.
- 마지막 부분에서 **유한** 곱셈 부분군(단위근)만 배제하는 것. 가환성 논증은 유한이든 무한이든, 덧셈이든 곱셈이든 모든 부분군을 한꺼번에 다룬다.

STEP 너머

이 문제는 불변량(invariants), 곧 원소의 위수나 가환성처럼 동형인 군들이 반드시 공유해야 하는 성질에 관한 것이다. 사실 위수가 6인 군은 모두 Z_6 또는 S_3와 동형이다. 더 일반

적으로, 곱셈에 대한 0이 아닌 복소수들의 유한 부분군은 모두 순환군(cyclic)이므로 단위근(roots of unity)들의 군이다. 두 결과 모두 군론 첫 강의의 초반에 만나게 된다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 이에 관해 읽기 좋은 친절한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.