풀이

STEP III 1994, 문제 6

순수수학 • 아르강 도표에서의 회전

> **STEP III 1994, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q6

핵심 아이디어

점 p를 중심으로 각 θ만큼 회전(rotation)하는 것은 사상 $z \mapsto p + e^{i\theta}(z-p)$이다. 즉 p를 원점으로 옮기고, 회전한 다음, 다시 되돌려 놓는다. 이러한 사상 여러 개를 합성(composition)하면 언제나 $z \mapsto \lambda z + \mu$ 꼴이 되고, "모든 P_1에 대해 $P_{\text{last}} = P_1$"이라는 것은 이 사상이 항등사상(identity)이라는 뜻이므로 $\lambda = 1$이고 $\mu = 0$이다. 나머지는 모두 이 두 방정식을 기하학적으로 읽어 내는 일이다.

풀이

z_5 구하기

양의 방향으로 4분의 1 바퀴 도는 것은 i를 곱하는 것이므로, P_1을 A를 중심으로 회전하면

$$z_2 = a + i(z_1 - a) = (1-i)a + iz_1.$$

을 얻는다. 같은 방법으로 $z_3 = (1-i)b + iz_2$, $z_4 = (1-i)c + iz_3$, $z_5 = (1-i)d + iz_4$이다. 한 단계씩 거슬러 대입하면

$$\begin{aligned} z_5 &= (1-i)(d + ic + i^2 b + i^3 a) + i^4 z_1 \\ &= (1-i)(d - b + i(c-a)) + z_1. \end{aligned}$$

P_5는 언제 P_1으로 돌아오는가?

4분의 1 회전을 네 번 하면 한 바퀴가 되므로 z_1의 계수는 정확히 1이고,

$$z_5 - z_1 = (1-i)(d - b + i(c-a)),$$

이며, 이는 z_1에 전혀 의존하지 않는다. 합성 사상은 순수한 평행이동(translation)이다. $1 - \mathrm{i} \neq 0$이므로

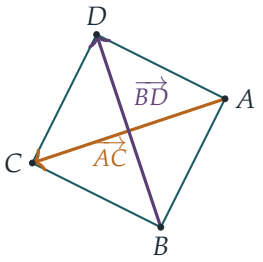
$$\begin{aligned} z_5 = z_1, \text{모든} z_1 &\iff d - b + \mathrm{i}(c - a) = 0 \\ &\iff \mathrm{i}(c - a) = b - d \\ &\iff a - c = \mathrm{i}(b - d), \end{aligned}$$

이다. 여기서 마지막 단계는 양변에 $-\mathrm{i}$를 곱한 것이다($-\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = 1$). 모든 단계가 거꾸로도 성립하므로, 이것이 바로 요구된 "필요충분조건(if and only if)"이다. (조건이 성립하지 않으면 평행이동은 o이 아니고, 그러면 **모든** P_1의 선택에 대해 $P_5 \neq P_1$이다.)

? **생각해 보기** $a - c = \mathrm{i}(b - d)$는 도형 $ABCD$에 대해 무엇을 말해 주는가?

-1을 곱하면 조건은 $c - a = \mathrm{i}(d - b)$이다. 이제 $c - a$는 벡터 $\overrightarrow{AC}$를, $d - b$는 벡터 $\overrightarrow{BD}$를 나타낸다. i를 곱하면 벡터의 길이는 그대로 두고 $\pi/2$만큼 회전한다. 따라서

$\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{BD}$를 양의 방향으로 직각만큼 돌린 것이다. 즉 사각형(quadrilateral) $ABCD$의 대각선(diagonal) AC와 BD는 길이가 같고 서로 수직이며, AC는 BD에서 반시계 방향(anticlockwise)으로 4분의 1 바퀴 돌린 위치에 있다.



그림의 예에서 $\overrightarrow{BD} = -1 + 3\mathrm{i}$이고 $\overrightarrow{AC} = -3 - \mathrm{i} = \mathrm{i}(-1 + 3\mathrm{i})$이다. 방향(orientation)이 중요하다. **시계 방향**(clockwise)으로 이름 붙인 정사각형은 조건을 만족하지만, 반시계 방향으로 이름 붙인 정사각형은 만족하지 않는다(이 경우 $\overrightarrow{AC} = -\mathrm{i}\,\overrightarrow{BD}$이다).

각 θ만큼의 회전 세 번

$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$라 하자. 앞에서와 똑같이 각 단계는 $z \mapsto (1 - w)p + wz$이므로

$$\begin{aligned} z_4 &= (1 - w)c + w\big((1 - w)b + w\big((1 - w)a + wz_1\big)\big) \\ &= (1 - w)\big(c + wb + w^2a\big) + w^3z_1. \end{aligned}$$

이것은 $\lambda = w^3$, $\mu = (1 - w)(c + wb + w^2a)$인 $\lambda z_1 + \mu$이다. 이것이 모든 z_1에 대해 z_1과 같을 필요충분조건은 $\lambda = 1$이고 $\mu = 0$인 것이다($z_1 = 0$을 대입하면 $\mu = 0$을 얻고, 이어서 $z_1 = 1$을 대입하면 $\lambda = 1$을 얻는다).

각. $w^3 = 1$은 3θ가 2π의 배수라는 뜻이다. $\theta \neq 0$을 "정수 바퀴가 아니다"로 해석하므로 $w \neq 1$이다. 따라서 w는 실수가 아닌 1의 세제곱근(cube root of unity)이고

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

이다. **점**. $w \neq 1$이므로 $\mu = 0$은 $c + wb + w^2a = 0$이 된다. 양변에 w를 곱하고 $w^3 = 1$을 이용하면 $a + w^2b + wc = 0$을 얻으며, ($w^3 = 1$, $w \neq 1$이므로) $1 + w + w^2 = 0$이어서 $a = -(w + w^2)a$로 고쳐 쓸 수 있다. 따라서

$$w(c-a) + w^2(b-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c - a = -w\,(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}(b-a).$$

> **생각해 보기** $\theta = \pm 2\pi/3$일 때 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}$는 무엇인가?

$\theta = 2\pi/3$이면 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$이고, $\theta = -2\pi/3$이면 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이다($\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$이므로). 따라서 $\overrightarrow{AC}$는 $\overrightarrow{AB}$를 길이는 그대로 두고 $\mp\pi/3$만큼 돌린 것이다. 즉 ABC는 **정삼각형**(equilateral triangle)이며, $\theta = 2\pi/3$일 때는 A, B, C가 **시계 방향** 순서로, $\theta = -2\pi/3$일 때는 **반시계 방향** 순서로 놓인다. 역으로, 이 단계들은 모두 거꾸로도 성립하므로 이 조건들로부터 $\mu = 0$도 얻어진다.

A, B, C가 단위원 위에 있으므로 그 원이 삼각형의 외접원(circumcircle)이고, 정삼각형에서는 외심(circumcentre)이 곧 중심이므로 꼭짓점들은 $|z| = 1$ 위에 같은 간격으로 놓인다. 두 경우를 하나의 명제로 깔끔하게 합칠 수 있다.

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \qquad b = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad c = b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

말로 하면, 세 회전은 3분의 1 바퀴씩이고, A, B, C는 단위원 위에 같은 간격으로 놓이되 회전과 **반대** 방향으로 차례로 돌아간다.

검산

- 컴퓨터로 임의의 A, B, C, D를 중심으로 임의의 점에 4분의 1 회전을 네 번 적용해 보았더니 z_5에 대한 공식과 10^{-9}까지 일치했다. $c = a - \mathrm{i}(b-d)$일 때는 모든 P_1이 제자리로 돌아왔고, c를 0.1만큼 살짝 옮기자 성립하지 않았다.
- 단위원 위의 임의의 a와 $\theta = \pm 2\pi/3$에 대해 $b = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, $c = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$로 두면 임의의 z_1에 대해 $z_4 = z_1$이었다. 이름 붙이는 순서를 거꾸로 하거나 다른 θ를 쓰면 그렇지 않았다.
- 손으로 확인하기: 시계 방향으로 이름 붙인 단위 정사각형 $a = 0$, $b = \mathrm{i}$, $c = 1 + \mathrm{i}$, $d = 1$을 중심으로 $z_1 = 0$을 회전한다. 그러면 $0 \to 0 \to 1 + \mathrm{i} \to 1 + \mathrm{i} \to 0$이 된다. 제자리로 돌아왔다.

흔한 실수

- A를 중심으로 하는 회전을 $z \mapsto \mathrm{i}z$로 쓰는 것. 먼저 A를 원점으로 옮기는 것을 잊은 것이다.
- 방향을 빠뜨리는 것. 대각선의 회전 방향, 그리고 $\theta = \pm 2\pi/3$ 각각에 대한 삼각형의 방향도 조건의 일부이다.

STEP 너머

$|\lambda| = 1$인 사상 $z \mapsto \lambda z + \mu$는 평면의 방향을 보존하는 등거리변환(isometry)이며, 이들은 군(group)을 이룬다. 각은 더해지므로 회전들의 합성은 전체 각만큼의 회전이 되거나, 전체 각이 정수 바퀴이면 평행이동이 된다. 그래서 $z_5 - z_1$이 상수로 나온 것이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수에 대한 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.