풀이

STEP III 1994, 문제 5

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 1994, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q5

핵심 아이디어

$\sin^{-1} x$를 한 번 미분하면 제곱근이 나오고, 한 번 더 미분하면 제곱근이 전혀 없는 f''과 f' 사이의 관계식을 얻는다. 그러면 라이프니츠 정리(Leibniz's theorem)가 이 하나의 식을 모든 고계도함수에 대한 점화식(recurrence)으로 바꾸어 준다. $x = 0$에서는 대부분의 항이 사라지므로 매클로린(Maclaurin) 계수에 대한 간단한 점화식을 얻는다. g의 경우에는 로그의 법칙(laws of logarithms)을 쓰면 모든 것이 익숙한 $\ln(1 \pm x)$의 급수로 귀결된다.

풀이

미분방정식

$-1 < x < 1$일 때

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

두 번째 식에 $1-x^2$을 곱하면 $(1-x^2)\mathrm{f}''(x) = x(1-x^2)^{-1/2} = x\mathrm{f}'(x)$이므로

$$(1-x^2)\mathrm{f}''(x) - x\mathrm{f}'(x) = 0,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

점화식

이 항등식을 라이프니츠 정리 $(uv)^{(n)} = \sum_r \binom{n}{r} u^{(r)} v^{(n-r)}$를 이용하여 n번 미분한다. 첫 번째 곱에서는 $u = 1 - x^2$으로 둔다. 그 도함수는 차례로 $-2x$, -2, 그다음부터는 0이므로 세

항만 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)\mathrm{f}''\right] = (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} + n(-2x)\mathrm{f}^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\mathrm{f}^{(n)}.$$

두 번째 곱에서는 $u = x$이고, 두 항만 남는다.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\mathrm{f}'\right] = x\mathrm{f}^{(n+1)} + n\mathrm{f}^{(n)}.$$

두 식을 빼고 $2\binom{n}{2} = n(n-1)$을 이용하면

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - (n(n-1)+n)\mathrm{f}^{(n)} \\ &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - n^2\mathrm{f}^{(n)}, \end{aligned}$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다. 이 식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립하며, $n = 0$일 때는 처음의 식 그 자체이다. (원한다면 수학적 귀납법(induction)으로 증명할 수도 있다. n인 경우의 식을 한 번 미분하고 항을 정리하면 $n+1$인 경우를 얻는다. 이는 같은 계산을 한 단계씩 하는 것과 같다.)

f의 매클로린 급수

생각해 보기 x에 어떤 값을 넣으면 이 점화식을 쓰기 쉬워질까?

$x = 0$을 대입한다. 가운데 항이 사라지고 $1 - x^2 = 1$이므로

$$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2\,\mathrm{f}^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

출발점은 $\mathrm{f}(0) = \sin^{-1} 0 = 0$과 $\mathrm{f}'(0) = 1$이다.

짝수 계 도함수. $\mathrm{f}(0) = 0$이므로 점화식에 의해 모든 짝수 계 도함수는 0에서 값이 0이다. $\sin^{-1}$은 기함수(odd function)이므로 이는 예상한 대로이다.

홀수 계 도함수. $n = 1, 3, 5, \ldots$을 대입하면

$$\mathrm{f}'''(0) = 1^2, \quad \mathrm{f}^{(5)}(0) = 3^2 \cdot 1^2, \quad \mathrm{f}^{(7)}(0) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2,$$

이고, 일반적으로

$$\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = \left(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\right)^2 \qquad (k \geq 1).$$

따라서

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}x^7 + \cdots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots.$$

x^{2k+1}의 계수는 깔끔하게 정리된다. $(2k+1)! = (1 \cdot 3 \cdots (2k-1))(2 \cdot 4 \cdots 2k)(2k+1)$로 쓰고 홀수들의 곱 하나를 약분하면

$$a_{2k+1} = \frac{\left(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\right)^2}{(2k+1)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

$a_{2k+3}/a_{2k+1} \to 1$이므로 비판정법(ratio test)에 의해 이 급수는 $|x| < 1$에서 수렴한다. 그 범위에서 급수가 실제로 $\sin^{-1} x$와 같다는 것은 $(1-x^2)^{-1/2}$의 이항급수(binomial series)를 항별로 적분하여 확인할 수 있으며, 그렇게 하면 정확히 같은 계수를 얻는다.

함수 g

로그의 법칙에 의해 $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$이다. $|x| < 1$일 때

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

두 식의 차에서 짝수 차수 항은 소거되고 홀수 차수 항은 두 배가 된다. 따라서

$$\mathrm{g}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(g가 $\tanh^{-1} x$임을 알아챈 독자도 있을 것이다.)

계수 비교

> **생각해 보기** 두 계수 모두 인수 $\frac{1}{2k+1}$을 가진다. 그렇다면 남은 비교 대상은 무엇인가?

$n \geq 1$일 때 x^{2n+1}의 계수는 g에서 $\dfrac{1}{2n+1}$이고, f에서는

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

이다. n개의 인수 $\frac{2r-1}{2r}$은 각각 0과 1 사이에 엄격하게 놓여 있고, $n \geq 1$이므로 이러한 인수가 적어도 하나 있다. 따라서 이들의 곱은 1보다 엄격하게 작고, 그러므로

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

따라서 요구한 대로 g의 계수가 더 크다. $n = 0$일 때는 두 계수가 모두 1이며, 문제에서 이 경우를 제외한 것은 이 때문이다.

검산

- $x = -\frac{1}{2}$에서 급수를 x^{59}항까지 더하면 -0.5235987756이 되어 $\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$과 일치한다.
- 계수 $1, \frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}$는 $\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2 \mathrm{f}^{(n)}(0)$으로부터 직접 구한 값과 일치한다. 비교 $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$, $\frac{3}{40} < \frac{1}{5}$, $\frac{5}{112} < \frac{1}{7}$도 주장한 대로 성립한다.

- f의 모든 계수가 대응하는 g의 계수 이하이므로 $0 < x < 1$에서 $\sin^{-1} x < \tanh^{-1} x$이어야 한다. $x = 0.5$에서 $0.5236 < 0.5493$이다.

흔한 실수

- 라이프니츠 정리에서 $\binom{n}{2}$ 항을 빠뜨려 최종 계수에 n^2 대신 n이 나오는 실수.
- 제곱을 빼고 $\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$로 쓰는 실수. 점화식의 각 단계에서 곱해지는 것은 n이 아니라 n^2이다.
- 매클로린 계수를 구할 때 $(2k+1)!$ 대신 $(2k)!$이나 $(2k+1)$만으로 나누는 실수.

STEP 너머

비 $\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$는 $\binom{2n}{n}/4^n$과 같고, n이 클 때 $1/\sqrt{\pi n}$처럼 행동한다. 이는 월리스(Wallis)의 곱과 스털링(Stirling)의 공식에서 나오는 결과이다. $\sin^{-1} x$의 급수는 $x = 1$에서도 수렴하여 $\pi/2$가 되지만, 이를 증명하려면 수렴구간(interval of convergence)의 끝점에서의 거듭제곱급수(power series)에 관한 아벨(Abel)의 정리가 필요하다. 함수의 도함수들이 미분방정식(differential equation)을 만족하면 계수에 대한 점화식이 따라 나온다. 이것이 상미분방정식의 급수해법이며, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다. 테일러 급수가 언제 실제로 원래 함수와 같아지는지에 대한 엄밀한 증명은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.