풀이

STEP III 1994, 문제 4

순수수학 • 상미분방정식의 특이해

> **STEP III 1994, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.1 절 **해가 유일하지 않을 때**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/non-uniqueness.html

핵심 아이디어

양변의 제곱근을 취하면 이 방정식은 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm 2\sqrt{y}$가 되고, 곧바로 변수분리(separation of variables)가 된다. 더 좋은 방법은 모든 포물선(parabola) $y = (x-c)^2$이 이 방정식을 만족한다는 사실에 주목하는 것이다. 그러면 해는 단순히 $y = x^2$을 x축을 따라 미끄러뜨린 복사본들이다. 이 그림이 보이면, 뒤의 소문항들은 어떤 복사본이 어떤 점을 지나는지, 그리고 모든 복사본이 공통으로 가지는 것이 무엇인지에 관한 문제가 된다.

풀이

일반해

$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2 \geq 0$이므로 모든 해는 $y \geq 0$을 만족한다. $y > 0$인 곳에서는 상수 c에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{y} = \pm(x-c)$$

로 쓸 수 있고, 어느 부호이든 제곱하면

$$y = (x-c)^2.$$

을 얻는다. 왼쪽 절반과 오른쪽 절반, 그리고 꼭짓점(vertex)을 포함하여 이 포물선 전체가 해라는 것을 직접 확인해 볼 만하다. $y' = 2(x-c)$이므로 모든 x에 대하여 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$이다.

? **생각해 보기** 두 부호가 같은 식을 주었다. 그렇다면 "±"는 어디로 갔는가?

그것은 각 포물선의 두 절반 속에 숨어 있다. $y = (x-c)^2$ 위에서 기울기(gradient) $2(x-c)$는 꼭짓점의 왼쪽에서는 $-2\sqrt{y}$이고 오른쪽에서는 $+2\sqrt{y}$이므로, 하나의 포물선이 두 부호를 모두 사용한다. 부호의 선택은 한 점을 지나도록 맞출 때 c의 선택으로 다시 나타난다.

(a, b^2)를 지나는 해

$(a-c)^2 = b^2$이어야 하므로 $a - c = \pm b$, 즉 $c = a - b$ 또는 $c = a + b$이다. 두 해는

$$y = (x - a + b)^2 \qquad \text{그리고} \qquad y = (x - a - b)^2.$$

이다. $b \neq 0$이면 $a - b \neq a + b$이므로 이 둘은 서로 다르다. ($b = 0$이면 두 해는 꼭짓점이 $(a, 0)$인 하나의 포물선으로 합쳐진다. 이때 그 점은 해 $y = 0$ 위에도 놓이는데, 이 해는 마지막에 다시 만난다.) b를 $-b$로 바꾸면 두 해가 서로 바뀔 뿐인데, 점 (a, b^2)가 변하지 않으므로 당연한 일이다.

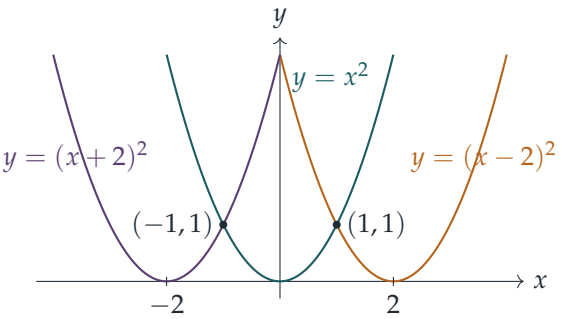
점 $(a_1, 1)$과 $(a_2, 1)$

$b = 1$로 두면 $(a, 1)$을 지나는 해는 $y = (x - a + 1)^2$과 $y = (x - a - 1)^2$이다. 포물선 $y = (x-c)^2$이 원점을 지나는 것은 정확히 $c = 0$일 때이므로, $a - 1 = 0$ 또는 $a + 1 = 0$이어야 한다. 따라서

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -1.$$

이다. $(1, 1)$을 지나는 해는 $y = x^2$ ($c = a_1 - 1 = 0$에서)과 $y = (x-2)^2$이다. $(-1, 1)$을 지나는 해는 $y = (x+2)^2$과 $y = x^2$ ($c = a_2 + 1 = 0$에서)이다.

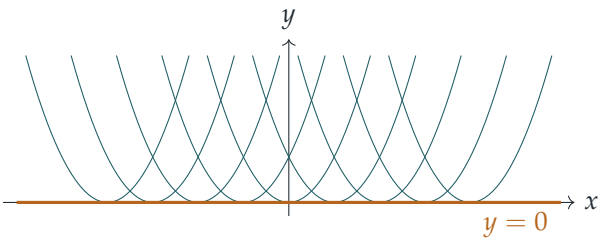
원점을 지나는 해는 두 점 모두에 대하여 같은 곡선 $y = x^2$이므로, 그 그래프는 일치한다. 이는 놀라운 일이 아니다. $(1, 1)$과 $(-1, 1)$은 $y = x^2$ 위에서 높이가 1인 두 점으로, 꼭짓점의 양쪽에 하나씩 있다. 나머지 두 해는 $y = (x-2)^2$과 $y = (x+2)^2$인데, 이는 $y = x^2$을 각각 오른쪽과 왼쪽으로 2만큼 평행이동한 것이다.



$(1,1)$에서 곡선 $y=x^2$의 기울기는 $+2$이고 $y=(x-2)^2$의 기울기는 -2이다. 한 점을 지나는 두 해는 언제나 그 점에서 기울기 $\pm 2b$로 교차하며, 각 기울기는 두 제곱근 중 하나에 대응한다.

해의 족과 공통접선

a와 b를 변화시키면 $c = a \pm b$가 모든 실수 위를 움직일 뿐이므로, 해의 족(family)은 $y=x^2$을 수평으로 평행이동(translate)한 모든 곡선이다.



모든 포물선은 기울기가 0인 꼭짓점 $(c,0)$에서 x축에 접한다. 따라서 직선 $y=0$은 족 전체의 공통접선(common tangent)이다(이것을 족의 **포락선**(*envelope*)이라 한다).

이것이 중요한 이유는 $y=0$ 자체가 해이기 때문이다. 이때 $y'=0$이므로 $(y')^2 = 0 = 4y$이다. 그러나 이 해는 어떤 c에 대해서도 포물선 중 하나가 아니다. 이것은 **특이해**(*singular solution*)로, 변수분리 과정에서 $\sqrt{y}$로 나누었기 때문에 놓친 해이다. 각 점 $(c,0)$에서 해 $y=0$과 포물선 $y=(x-c)^2$은 같은 값과 같은 기울기를 가지므로, x축 위의 점을 지나는 해는 유일하지 않다. 실제로 이어 붙일 수도 있다. $p<q$에 대하여

$$y = \begin{cases} (x-p)^2, & x < p, \\ 0, & p \le x \le q, \\ (x-q)^2, & x > q \end{cases}$$

는 연속인 도함수를 가지며 모든 곳에서 방정식을 만족한다. 그러므로 엄밀히 말하면 (a,b^2)를 지나는 "두 해"란 그 점 근처에서 포물선과 일치하는 두 해를 뜻한다. 그 점에서 멀어지면, 해가 x축에 닿은 뒤 한동안 축을 따라 달리다가 떠날 수도 있다.

검산

- 다시 대입해 본다. $y=(x-a\pm b)^2$에 대하여 $x=a$일 때 $y=b^2$이고, $(y')^2=4y$는 항등적으로 성립한다.
- (a,b^2)에서의 두 기울기는 $2(a-c)=\pm 2b$이며, 그 제곱은 둘 다 요구한 대로 $4b^2=4y$이다.

- 수치적으로, 중심차분(central difference) 도함수를 이용하여 임의의 포물선과 $p = -1$, $q = 1$인 위의 이어 붙인 곡선에 대해 $(y')^2 = 4y$임을 확인하였고, $(1,1)$과 $(-1,1)$을 지나는 해가 각각 $c \in \{0,2\}$와 $c \in \{-2,0\}$을 가져 $c = 0$만 공유한다는 것도 확인하였다.

흔한 실수

- $y' = 2\sqrt{y}$만 써서 각 점을 지나는 반쪽 포물선 하나만 얻는 것.
- $y = 0$을 잊는 것. 이것은 진짜 해이며, 마지막 소문항이 찾는 바로 그 공통접선이다.
- $(a_1,1)$과 $(a_2,1)$을 지나는 해 중 원점을 지나는 두 해가 서로 다른 곡선이라고 생각하는 것. 둘 다 $y = x^2$이다.

STEP 너머

이 방정식은 해의 유일성(uniqueness)이 깨지는 경우의 표준적인 예이다. 피카르-린델뢰프(Picard–Lindelöf) 정리는 f가 y에 대하여 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족할 때 한 점을 지나는 $y' = f(x,y)$의 해가 정확히 하나 존재함을 보장한다. 그런데 $\pm 2\sqrt{y}$는 $y = 0$ 근처에서 립시츠 조건을 만족하지 않으며, 바로 그곳에서 포물선들과 특이해가 만난다. 한 매개변수 곡선족의 포락선과, 클레로(Clairaut) 방정식 같은 방정식에서 포락선이 주는 특이해는 상미분방정식(ODE) 입문 강의의 고전적인 주제이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 이와 같은 예를 들어 해의 존재성과 유일성을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.