풀이

STEP III 1994, 문제 3

순수수학 • 구, 평면과 연결

STEP III 1994, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q3

핵심 아이디어

각 원은 자신만의 평면(plane) 위에 놓여 있고, 두 평면은 직선 L에서 만난다. 따라서 C_1이 C_2의 평면을 통과할 수 있는 곳은 L 위에 있는 C_1의 두 점뿐이며, 반대 방향으로도 마찬가지이다. 그러므로 두 원이 얽혀 있는지(linked)의 여부는 1차원 문제, 즉 L 위의 네 점이 직선을 따라 어떻게 배열되어 있는가의 문제로 귀결된다.

풀이

평면과 구

구(sphere)의 중심을 Q, 반지름을 r라 하고, Q에서 평면 Π까지의 거리를 d라 하자. Q에서 Π에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)을 F라 하자. Π 위의 점 X에 대하여 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 $QX^2 = d^2 + FX^2$이므로, X가 구 위에 있을 필요충분조건은 $FX^2 = r^2 - d^2$이다. 따라서 다음이 성립한다.

- $d > r$이면 평면은 구와 만나지 않는다.
- $d = r$이면 평면은 구와 한 점 F에서 접한다(접평면(tangent plane)이다).
- $d < r$이면 교집합은 Π 위에서 중심이 F이고 반지름이 $\sqrt{r^2 - d^2}$인 원이다. $d = 0$일 때 이것은 반지름이 r인 대원(great circle)이다.

주어진 자료

완전제곱식으로 고치면 S_2는

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3,$$

이고, 중심은 $(0,3,2)$, 반지름은 $\sqrt{3}$이다. 구 S_1은 중심이 O이고 반지름이 $\sqrt{7}$이다.

O에서 P_1까지의 거리는 $\frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} < \sqrt{7}$이므로, C_1은 반지름이 $\sqrt{7 - \frac{1}{10}}$인 진짜 원이다. $(0,3,2)$에서 P_2까지의 거리는 $\frac{|0-3+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$이므로, C_2는 반지름이 $\sqrt{3-2} = 1$인 원이다. 그 중심은 수선의 발 $(0,3,2) + (1,-1,0) = (1,2,2)$이다. $1 - 2 + 1 = 0$임을 확인하라.

직선 L

두 평면의 방정식을 빼면 $2x - 2 = 0$이므로 $x = 1$이고, 그러면 $y = x + 1 = 2$이며, z는 자유롭다. 따라서

$$L = \{(1,2,t) : t \in \mathbb{R}\},$$

즉 L은 $(1,2,0)$을 지나는 수직선이다.

S_1 위에서는 $1 + 4 + t^2 = 7$이므로 $t = \pm\sqrt{2}$이다. 따라서 L은 S_1과

$$(1,2,\sqrt{2}) \quad \text{그리고} \quad (1,2,-\sqrt{2}).$$

에서 만난다. S_2 위에서는 $1 + 1 + (t-2)^2 = 3$이므로 $t - 2 = \pm 1$이다. 따라서 L은 S_2와

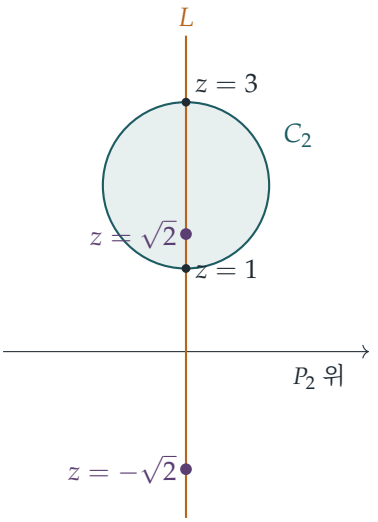
$$(1,2,1) \quad \text{그리고} \quad (1,2,3).$$

에서 만난다. L이 P_1 위에 있으므로, S_1 위에 있는 L의 점들은 정확히 C_1 위에 있는 L의 점들이다. 마찬가지로 S_2 위에 있는 L의 점들은 C_2 위에 있는 L의 점들이다. 특히 $(1,2,1)$과 $(1,2,3)$은 C_2의 한 지름의 양 끝점이며, 이는 C_2의 중심이 $(1,2,2)$이고 반지름이 1이라는 사실과 일치한다.

두 원은 얽혀 있는가?

먼저, 두 원은 만나지 않는다. 공통점이 있다면 그 점은 $P_1 \cap P_2 = L$ 위에 있어야 하는데, L 위에 있는 C_1의 점들($z = \pm\sqrt{2}$)은 L 위에 있는 C_2의 점들($z = 1, 3$)과 다르다.

C_2를 경계로 하는 P_2 위의 평평한 원판(disc)을 D_2라 하자. D_2는 L과 $(1,2,1)$에서 $(1,2,3)$까지의 지름, 즉 $1 \le t \le 3$인 점 $(1,2,t)$들에서 만난다.



그림은 평면 P_2를 나타낸 것으로, C_2와 그 원판이 칠해져 있다. 보라색 점들은 C_1이 P_2를 통과하는 곳이다.

> **생각해 보기** C_1이 이 두 점에서 P_2에 단지 접하는 것이 아니라 정말로 P_2를 **통과하**는 이유는 무엇인가?

직선 L은 평면 P_1을 두 개의 반평면(half-plane)으로 나누는데, P_1이 L을 따라 P_2를 가로지르므로 이 두 반평면은 P_2의 서로 반대쪽에 있다. 원 C_1은 L과 서로 다른 두 점에서 만나므로, L은 C_1을 두 개의 호로 자르고, 각 반평면에 호가 하나씩 놓인다. 따라서 C_1의 한 호는 P_2의 한쪽에 완전히 놓이고 다른 호는 반대쪽에 완전히 놓이며, C_1은 $(1, 2, \sqrt{2})$와 $(1, 2, -\sqrt{2})$에서 P_2를 가로지르고, 그 밖의 곳에서는 가로지르지 않는다.

이제 $1 < \sqrt{2} < 3$이므로 $(1, 2, \sqrt{2})$에서의 교차는 원판 D_2 안에서 일어난다. 그러나 $-\sqrt{2} < 1$이므로 $(1, 2, -\sqrt{2})$에서의 교차는 원판 밖에서 일어난다. C_1을 한 바퀴 돌면, C_2가 둘러싸는 원판을 정확히 한 번 통과하고, 원판 밖에서 P_2를 다시 가로질러 돌아온다. 다시 말해 C_1은 사슬의 두 고리처럼 C_2를 한 번 꿰뚫고 지나간다.

L을 따라 네 점은

$$-\sqrt{2} < 1 < \sqrt{2} < 3,$$

의 순서로 놓이므로, C_1에서 온 쌍과 C_2에서 온 쌍이 **번갈아 끼어 있다**. 바로 이것이 C_1이 D_2를 한 번 가로지르게 만든다. (어느 쌍도 다른 쌍을 분리하지 않는다면 C_1은 D_2를 두 번 가로지르거나 전혀 가로지르지 않을 것이고, 두 원은 얽혀 있지 않을 것이다.) 따라서 **두 원 C_1과 C_2는 얽혀 있다**.

두 원을 떼어 놓을 수는 없다. 두 원을 멀리 떨어진 두 원으로 옮기는 연속적인 움직임은 어떤 것이든 C_1이 C_2의 원판을 가로지르는 횟수를 홀수에서 짝수로 바꾸어야 한다. 그런데 한

원이 다른 원을 통과하지 않는 한 교차는 쌍으로만 생기고 사라지며, 자르지 않고 떼어 내는 과정에서는 그런 통과가 허용되지 않는다.

검산

각 점을 대입해 보라. 예를 들어 $(1,2,1)$을 대입하면 $3-2-1=0$, $1-2+1=0$, $1+4+1-12-4+10=0$이다. 수치적으로, 두 원을 매개변수화하여 가우스(Gauss)의 얽힘 적분(linking integral) $\frac{1}{4\pi}\oint\oint \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\times\mathrm{d}\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$ 을 계산하였더니 1.002를 얻었다(얽혀 있지 않은 쌍이면 0이 나온다). 또한 두 원 사이의 최단 거리가 약 0.09임을 확인하였으므로, 두 원은 가까이 다가가지만 닿지는 않는다.

흔한 실수

- 두 원이 만나는지만 확인하는 것. 두 원은 만나지 않지만, 그것만으로는 얽혀 있는지에 대해 아무것도 말해 주지 않는다.
- C_1과 P_2의 교점이 L 위에 있어야 한다는 사실을 잊고 다른 곳에서 교점을 찾는 것.
- S_2의 중심을 잘못 구하는 것. $-6y$와 $-4z$ 항으로부터 중심은 $(0,-3,-2)$가 아니라 $(0,3,2)$이다.

STEP 너머

서로 만나지 않는 두 닫힌곡선이 얽혀 있는지는 정수 불변량(invariant)인 **얽힘수**(linking number)로 측정된다. 얽힘수는 한 곡선이 다른 곡선을 경계로 하는 곡면을 부호를 고려하여 몇 번 가로지르는지 세어서 계산할 수도 있고(우리가 한 방법이다), 검산에서 쓴 가우스의 이중적분으로 계산할 수도 있다. 얽힘수는 매듭 이론(knot theory)과 대수적 위상수학(algebraic topology)으로 들어가는 첫걸음이다. Colin Adams의 *The Knot Book*(매듭 이론 입문서)은 매우 읽기 쉬운 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.