풀이

STEP III 1994, 문제 2

순수수학 • 상반 사차방정식

STEP III 1994, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q2

핵심 아이디어

(i)의 사차식(quartic)은 **회문형**(*palindromic*)이다. 즉 계수(coefficient)를 앞에서부터 읽으나 뒤에서부터 읽으나 같다. x^2으로 나누면 x^2은 x^{-2}와, x는 x^{-1}과 짝을 이루고, 두 짝 모두 $y = x + x^{-1}$로 나타낼 수 있으므로 사차식이 y에 대한 이차식(quadratic)으로 줄어든다. (ii)에는 힌트가 없으므로 같은 대칭성을 비튼 형태를 찾아본다. 배율을 허용하면 계수 1, 1, −10, −4, 16이 짝을 이루며, 이로부터 치환(substitution) $y = x - 4/x$를 떠올릴 수 있다.

풀이

소문항 (i)

상수항(constant term)이 $1 \neq 0$이므로 $x = 0$은 근이 아니고, 따라서 x^2으로 나눌 수 있다.

$$x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \text{즉} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0.$$

$y = x + x^{-1}$로 두면 $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$이므로 $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$이다. 방정식은 다음과 같이 된다.

$$y^2 - 2 + 10y + 26 = 0 \iff y^2 + 10y + 24 = 0 \iff (y+4)(y+6) = 0,$$

따라서 $y = -4$ 또는 $y = -6$이다. 이제 $x + x^{-1} = y$의 양변에 x를 곱하여 x로 돌아간다($x \neq 0$이므로 역시 문제없다).

$$x + \frac{1}{x} = -4 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3},$$
$$x + \frac{1}{x} = -6 \iff x^2 + 6x + 1 = 0 \iff x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

이들은 서로 다른 네 수이고, 사차방정식의 근은 많아야 네 개이므로 해는 다음과 같다.

$$x = -2 \pm \sqrt{3}, \qquad x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

근이 역수(reciprocal) 쌍으로 나타난다는 점에 주목하자. $(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 1$이고 $(-3+2\sqrt{2})(-3-2\sqrt{2}) = 1$이다. 회문형 다항식이라면 바로 이렇게 되어야 한다. x를 $1/x$로 바꾸고 x^4을 곱하면 같은 방정식이 다시 나오기 때문이다.

소문항 (ii)

> ? **생각해 보기** 계수 1, 1, −10, −4, 16은 대칭이 아니다. 그래도 (i)과 같은 치환이 통할까?

바깥쪽 계수끼리 비교해 보자. 상수항은 최고차항의 계수(leading coefficient)의 $16 = 4^2$배이고, x의 계수는 x^3의 계수의 -4배이다. 따라서 항들이 다음과 같이 짝을 이룬다.

$$x^4 + 16 = x^2\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right), \qquad x^3 - 4x = x^2\left(x - \frac{4}{x}\right).$$

이는 회문형 패턴에서 $1/x$를 $-4/x$로 바꾼 것이다. 상수항이 16이므로 $x = 0$은 근이 아니고, x^2으로 나누면 다음을 얻는다.

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + \left(x - \frac{4}{x}\right) - 10 = 0.$$

$y = x - 4/x$로 두자. 그러면 $y^2 = x^2 - 8 + 16/x^2$이므로 $x^2 + 16/x^2 = y^2 + 8$이고,

$$y^2 + 8 + y - 10 = 0 \iff y^2 + y - 2 = 0 \iff (y-1)(y+2) = 0,$$

따라서 $y = 1$ 또는 $y = -2$이다. $x - 4/x = y$의 양변에 x를 곱하면

$$x - \frac{4}{x} = 1 \iff x^2 - x - 4 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$
$$x - \frac{4}{x} = -2 \iff x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

이번에도 서로 다른 네 근이므로 이것이 근 전부이다.

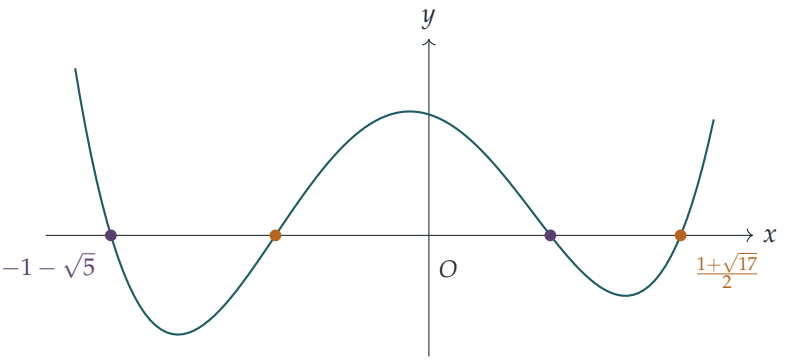
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \qquad x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

여기서는 근들이 곱이 1이 아니라 -4가 되도록 짝을 이룬다. 이제 대칭은 $x \mapsto -4/x$이다.

검산으로, 위의 풀이는 다음 인수분해(factorisation)와 같다.

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 16 = (x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 4),$$

전개해 보면 확인할 수 있다. x^3 항은 $2 - 1 = 1$, x^2 항은 $-4 - 2 - 4 = -10$, x 항은 $4 - 8 = -4$이다.



(ii)의 사차식의 그래프는 축과 네 번 만난다. 호박색 근은 $x^2 - x - 4 = 0$에서, 자주색 근은 $x^2 + 2x - 4 = 0$에서 나온다.

검산

- 근의 곱: (i)에서 네 근을 모두 곱하면 $1 \cdot 1 = 1$로 상수항과 같고, (ii)에서는 $(-4)(-4) = 16$으로 역시 상수항과 같다.
- 근의 합: (i)에서 $(-4) + (-6) = -10$으로 x^3의 계수에 마이너스를 붙인 값이고, (ii)에서도 $1 + (-2) = -1$로 마찬가지이다.
- 수치적으로, $x = -2 + \sqrt{3} \approx -0.268$과 $x = -3 - 2\sqrt{2} \approx -5.828$은 모두 (i)의 사차식의 값을 10^{-9} 이내로 0에 가깝게 만들고, $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}) \approx 2.562$와 $x = -1 - \sqrt{5} \approx -3.236$도 (ii)에서 마찬가지이다.

흔한 실수

- 교차항(cross term)을 빠뜨리는 실수: $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$이지 y^2이 아니다. 또 (ii)에서는 $x^2 + 16x^{-2} = y^2 + 8$인데, $(x - 4/x)^2$의 교차항이 -8이므로 부호가 플러스이다.
- (ii)에서 $y = x + 4/x$를 시도하는 실수. 그러면 $x^2 + 16/x^2 = y^2 - 8$은 얻지만 $x^3 - 4x$는 만들 수 없다. 이 항의 부호를 보면 $x - 4/x$여야 한다.
- y의 값에서 멈추는 실수. 문제는 x를 구하라고 하며, y의 값 하나마다 x의 값이 두 개씩 나온다.

STEP 너머

이 기법이 통하는 것은 다항식이 어떤 치환에 대해 불변(invariant)이기 때문이다. (i)에서는 $x \mapsto 1/x$, (ii)에서는 $x \mapsto -4/x$이다. 양 y는 그 치환에 의해 변하지 않으며, 변하지 않는

다항식 표현은 모두 y로 나타낼 수 있다. 이것은 다항식의 근들 사이의 대칭이 그 방정식을 어떻게 풀 수 있는지를 결정한다는 갈루아 이론(Galois theory)을 처음 엿보는 것이다. 이 아이디어가 전개되는 모습을 보려면 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.