풀이

STEP III 1994, 문제 14

확률과 통계 • 기하학적 확률

> **STEP III 1994, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q14

핵심 아이디어

원에 내접하는 각, 즉 원주각(inscribed angle)은 마주 보는 호(arc)가 중심에서 이루는 각의 절반이다. 따라서 삼각형의 세 각은 P, Q, R가 원을 나누어 만든 세 호를 원주에 대한 비율로 잰 값에 π를 곱한 것에 지나지 않는다. 그러면 문제는 원이 무작위로 세 조각으로 나뉘는 방식에 관한 문제가 되고, 이는 다시 삼각형 내부의 넓이에 관한 문제가 된다.

풀이

설정하기

원 위의 위치를 원주에 대한 비율로 재어, 원의 "길이"가 1이 되도록 한다. 회전 대칭(rotational symmetry)에 의해 P의 위치는 중요하지 않으므로 P를 0에 둔다. 그러면 Q와 R의 위치는 서로 독립(independent)이고 각각 $[0,1)$에서 균등분포(uniform distribution)를 따른다.

Q와 R의 위치를 작은 순서대로 $U < V$라 하자. 순서쌍 (U,V)는 넓이가 $\frac{1}{2}$인 영역 $0 < u < v < 1$에서 균등하게 분포하므로, 그 영역에서 결합 밀도(joint density)는 2이다. (두 점이 겹칠 확률은 0이고, 아래에 나오는 경계의 경우들도 모두 마찬가지이다.) 세 호는 다음과 같다.

$$X = U, \qquad Y = V - U, \qquad Z = 1 - V, \qquad X + Y + Z = 1.$$

변수 변환(change of variables) $(u,v) \mapsto (x,y) = (u, v-u)$의 야코비안(Jacobian)은 1이므로, (X,Y)는 삼각형

$$T = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\},$$

위에서 밀도 2를 가진다. 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다. 따라서 아래의 모든 확률은 T 내부의

넓이의 두 배이다.

생각해 보기 삼각형의 각 각이 왜 호에 π를 곱한 값인가?

삼각형의 R에서의 각은 R를 포함하지 않는 호 PQ 위에 서 있는 원주각이다. 원주각 정리에 의해 이 각은 그 호가 중심에서 이루는 각의 절반이다. 원주의 x만큼을 차지하는 호는 중심에서 $2\pi x$의 각을 이루므로, R에서의 각은 πx이다. 각 꼭짓점에서 같은 사실이 성립하므로 PQR의 세 각은 πX, πY, πZ이다(그리고 그 합은 당연히 π이다). 그러므로

$$\text{한 각이 다음 값보다 크다: } k\pi \iff \text{대응하는 호가 다음 값보다 크다: } k.$$

사건 $X > k, Y > k, Z > k$를 각각 A_X, A_Y, A_Z라 하자. 구하려는 것은 $\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z)$이다.

한 호가 k보다 큰 경우

$0 \le k \le 1$에 대하여:

- A_X는 T에서 $x > k$인 부분이다. 이는 두 변의 길이가 $1-k$인 직각삼각형이고 넓이는 $\frac{1}{2}(1-k)^2$이다.
- A_Y는 $y > k$인 부분이다. 같은 계산으로 넓이는 $\frac{1}{2}(1-k)^2$이다.
- A_Z는 $x + y < 1 - k$인 부분이다. 이는 두 변의 길이가 $1-k$인 모서리의 삼각형이고 넓이는 $\frac{1}{2}(1-k)^2$이다.

두 배를 하면 $\mathrm{P}(A_X) = \mathrm{P}(A_Y) = \mathrm{P}(A_Z) = (1-k)^2$이다.

$\frac{1}{2} \le k \le 1$인 경우

k보다 큰 호는 많아야 하나이다. 두 호가 k보다 크다면 그 합은 $2k \ge 1$보다 커지지만, 세 호의 합은 1이기 때문이다. 따라서 사건 A_X, A_Y, A_Z는 서로 배반(mutually exclusive)이고,

$$\mathrm{P}(\text{어떤 각이 다음보다 큼: } k\pi) = 3(1-k)^2,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

$\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$인 경우

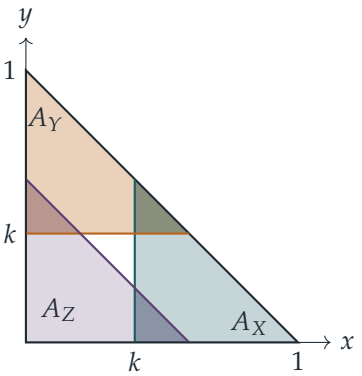
이제는 두 호가 동시에 k보다 클 수 있으므로 포함-배제 원리(inclusion–exclusion)를 사용한다.

두 호. $A_X \cap A_Y$는 T에서 $x > k, y > k, x + y < 1$인 부분이다. $x = k + s, y = k + t$로 치환하면 이는 $s, t > 0, s + t < 1 - 2k$가 되고, 두 변의 길이가 $1 - 2k \ge 0$인 삼각형으로 넓이는

$\frac{1}{2}(1-2k)^2$이다. 따라서 $\mathrm{P}(A_X \cap A_Y) = (1-2k)^2$이다. 나머지 두 쌍도 같은 값을 준다. 예를 들어 $A_X \cap A_Z$는 $x > k, y > 0, x + y < 1 - k$이며, 이 역시 두 변의 길이가 $1-2k$인 삼각형이다.

세 호. 세 호가 모두 k보다 크려면 $X + Y + Z > 3k \geq 1$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 세 사건의 교집합의 확률은 0이다.

아래 그림은 $k = 0.4$일 때의 T를 나타낸다. 세 모서리의 삼각형이 A_X, A_Y, A_Z이고, 더 진하게 겹친 부분이 두 사건씩의 교집합이다.



포함-배제 원리에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z) &= 3(1-k)^2 - 3(1-2k)^2 + 0 \\ &= 3\big[(1-k) - (1-2k)\big]\big[(1-k) + (1-2k)\big] \\ &= 3k(2-3k).\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{2}$일 때 적어도 한 각이 $k\pi$보다 클 확률은

$$3k(2-3k) = 6k - 9k^2.$$

검산

- $k = \frac{1}{2}$에서 두 공식은 모두 $\frac{3}{4}$를 주므로 연속적으로 이어진다. 이는 무작위로 내접한 삼각형이 둔각삼각형(obtuse triangle)일 확률이 $\frac{3}{4}$라는 고전적인 결과이다.
- $k = \frac{1}{3}$에서는 $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$을 얻는다. 세 각의 합이 π이므로 가장 큰 각은 항상 $\frac{\pi}{3}$ 이상이고, 따라서 이 값은 옳다.
- $k = 1$에서는 0을 얻는다. 어떤 각도 π보다 클 수 없기 때문이다.
- 무작위 삼각형 4×10^5개를 시뮬레이션하여 좌표로부터 각을 직접 계산한 결과, $k = 0.4$에서 0.9602(공식 0.96), $k = 0.6$에서 0.4783(공식 0.48)을 얻었다.

흔한 실수

- 세 번째 꼭짓점을 **포함하지 않는** 호 대신 호 PQ 전체를 사용하는 것. 두 개의 호 PQ 중에서 R의 맞은편에 있는 호는 하나뿐이다.
- X, Y, Z를 서로 독립인 균등분포 확률변수로 취급하는 것. 이들은 $X+Y+Z=1$이라는 제약을 받으며, 이를 제대로 다루는 방법이 넓이를 이용한 그림이다.
- $k=\frac{1}{2}$보다 작은 경우에 $3(1-k)^2$을 적용하는 것. $k<\frac{1}{2}$이면 이 식은 큰 각이 두 개인 삼각형을 두 번 세게 되며, $k=\frac{1}{3}$에서는 $\frac{4}{3}>1$이 되어 버린다.

STEP 너머

호 (X,Y,Z)는 단체(simplex) $x+y+z=1$ 위에서 균등하게 분포한다. 이것이 디리클레 분포(Dirichlet distribution)이며, 무작위 점들이 구간이나 원을 자를 때 생기는 "간격(spacings)"을 기술한다. 점이 n개일 때 같은 포함-배제 원리로 $\mathrm{P}(\text{가장 큰 간격} > k) = \sum_j (-1)^{j+1}\binom{n}{j}(1-jk)_+^{n-1}$를 얻는데, 이 공식은 Whitworth까지 거슬러 올라간다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 기하학적 확률과 결합밀도를 잘 다루고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.