풀이

STEP III 1994, 문제 11

역학 • 강체의 평형

STEP III 1994, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s3-q11

핵심 아이디어

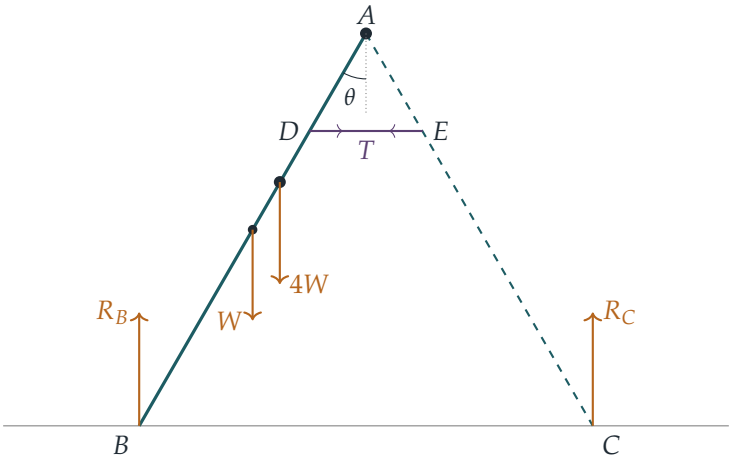
바닥이 매끄러우므로 바닥이 작용하는 힘은 연직 방향뿐이고, 따라서 사다리 전체를 생각하면 C에서의 반작용(reaction)을 곧바로 구할 수 있다. 그다음에는 가벼운 다리 AC가 영리한 역할을 한다. AC에는 바닥의 반작용, 밧줄의 장력(tension), 경첩의 힘이라는 세 힘만 작용하므로, 경첩 A에 대한 모멘트(moment)를 취하면 미지의 경첩 힘이 사라지고 밧줄의 장력과 C에서의 반작용이 연결된다. 훅의 법칙(Hooke's law)은 장력을 사다리의 각과 연결해 주고, 이로부터 β를 각의 함수로 얻어 이를 최대화한다.

풀이

설정하기

AB는 균일한 막대, AC는 가벼운 막대로 모형화하고, 둘의 길이는 모두 $4a$이며 A에 매끄러운 경첩이 있다고 하자. 밧줄은 가볍고 탄성이 있다. 사람은 질점(particle)으로 본다. 대칭성($AD = AE$이고 $AB = AC$)에 의해 밧줄 DE는 수평이다. 각 다리가 연직선과 이루는 각을 θ라 하고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.

바닥이 매끄러우므로 B와 C에서의 반작용 R_B와 R_C는 연직 방향이다. AB의 무게 W는 중점에 작용하며, 이 점은 B로부터 수평 거리 $2a\sin\theta$만큼 떨어져 있다. 사람의 무게 $4W$는 B로부터 수평 거리 $\beta a\sin\theta$인 곳에 작용한다. 장력 T는 D와 E를 서로를 향해 끌어당긴다.



C에서의 반작용

접사다리 전체에 대해 B에 대한 모멘트를 취하면(경첩 힘과 장력은 내력이므로 나타나지 않는다), $BC = 8a\sin\theta$이므로

$$R_C \cdot 8a\sin\theta = W \cdot 2a\sin\theta + 4W \cdot \beta a\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad R_C = \tfrac{1}{4}W(1+2\beta).$$

연직 방향으로 힘을 분해하면 $R_B = 5W - R_C = \frac{1}{4}W(19-2\beta)$이고, $\beta \le 4$(발판이 사다리 위에 있다)이므로 이 값은 양수이다. 따라서 다리가 바닥에서 들리는 일은 없다.

밧줄의 장력

밧줄의 길이는 $DE = 2a\sin\theta$이고 자연 길이는 $\frac{a}{4}$이다. 만약 밧줄이 느슨하다면 $T = 0$이고, 아래에서 AC에 대해 A에 대한 모멘트를 취하면 $R_C = 0$이 되어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 밧줄은 늘어나 있고 $\sin\theta > \frac{1}{8}$이며, 훅의 법칙에 의해

$$T = \frac{W\left(2a\sin\theta - \frac{a}{4}\right)}{a/4} = W(8\sin\theta - 1).$$

가벼운 다리 AC의 평형

? **생각해 보기** 왜 AB가 아니라 AC만 따로 살펴볼까?

다리 AC는 가벼우므로 C에서의 R_C, E에서의 장력 T, A에서의 경첩 힘이라는 세 힘만 작용한다. A에 대한 모멘트를 취하면 미지의 경첩 힘이 사라진다. 장력은 수평이며 A보다 연직으로 $a\cos\theta$만큼 아래에서 작용하고, 반작용 R_C는 연직이며 A로부터 수평 거리 $4a\sin\theta$인 곳에서 작용한다. 따라서

$$R_C \cdot 4a\sin\theta = T \cdot a\cos\theta.$$

R_C와 T를 대입하면

$$W(1+2\beta)\sin\theta = W(8\sin\theta - 1)\cos\theta,$$
$$\text{따라서}\quad 1+2\beta = 8\cos\theta - \cot\theta,$$
$$\text{그러므로}\quad \beta = \tfrac{1}{2}\left(8\cos\theta - \cot\theta - 1\right).$$

사람의 각 위치 β에 대해, 평형이 가능할 필요충분조건은 이 방정식이 ($\sin\theta > \frac{1}{8}$인) 해 θ를 갖는 것이다. 따라서 가능한 가장 큰 β는 $f(\theta) = 8\cos\theta - \cot\theta$의 최댓값으로 정해진다.

최대화하기

미분하면

$$f'(\theta) = -8\sin\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1 - 8\sin^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

$\sin\theta$는 $(0, \frac{\pi}{2})$에서 증가하므로, 이 값은 $\sin\theta < \frac{1}{2}$일 때 양수이고 $\sin\theta > \frac{1}{2}$일 때 음수이다. 따라서 f는 $\sin\theta = \frac{1}{2}$, 즉 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때 최댓값을 가지며, 이때

$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 8\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \beta_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) \approx 2.10.$$

이 값은 4보다 작으므로 발판은 사다리 위에 있고, $\sin\theta = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$이므로 가정한 대로 밧줄은 팽팽하다.

발판의 높이

발판은 B로부터 BA를 따라 βa만큼 떨어져 있고 BA는 연직선과 각 θ를 이루므로, 발판의 높이는

$$h = \beta a\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) a\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(9-\sqrt{3})\,a}{4} \approx 1.82a.$$

검산

- $W = a = 1$이고 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때: $T = 8\cdot\frac{1}{2} - 1 = 3$이고 $R_C = \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$이며, 실제로 $R_C\cdot 4\sin\theta = 2.598 = T\cos\theta$이다.
- 두 다리 각각에 대한 힘과 모멘트 방정식을 따로 풀고 θ를 $(0, \frac{\pi}{2})$ 전체에서 훑어본 수치 검산에서, 가장 큰 β는 $\theta \approx 30^\circ$에서 2.09808이었고 이때 높이는 $1.81699a$였다.
- 극한의 경우도 타당하다. $\sin\theta \to \frac{1}{8}$이면 밧줄이 느슨해지고 β는 음수가 되어야 하며, $\theta \to \frac{\pi}{2}$이면 밧줄의 모멘트 팔 $a\cos\theta$가 0이 되므로 역시 β가 줄어들어야 한다. 따라서 그 사이에 최댓값이 있으리라 예상할 수 있다.

흔한 실수

- A에서의 경첩 힘을 수평이라고 가정하는 것. 두 다리에 걸리는 하중이 다르므로 일반적으로 수평이 아니다. A에 대한 모멘트를 취하면 이 힘이 아예 필요 없다.
- 전체 길이 $DE = 2a\sin\theta$를 늘어난 길이로 쓰는 것. 늘어난 길이는 $2a\sin\theta - \frac{a}{4}$이다.
- 문제에서 요구한 높이 대신 $\beta_{\max}$(사다리를 따라 잰 거리)를 답으로 내는 것. 높이를 구하려면 인수 $a\cos\theta$를 더 곱해야 한다.

STEP 너머

이 문제는 배치(θ)가 주어지지 않고 탄성 밧줄에 의해 정해지는 정역학(statics) 문제이다. 따라서 평형 위치들은 하나의 매개변수를 갖는 족을 이루고, 문제는 그 족 위에서의 최적화 문제가 된다. 대학에서는 이것이 가상일(virtual work)과 퍼텐셜 에너지(potential energy) 방법의 바탕이 되는 아이디어이다. 평형점은 퍼텐셜 에너지의 정류점(stationary point)이며, 어느 평형이 안정한지를 묻다 보면 분기(bifurcation) 이론과 파국(catastrophe) 이론으로 이어진다. 역학을 더 깊이 공부하려면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.