풀이

STEP III 1994, 문제 10

역학 • 상대 속도

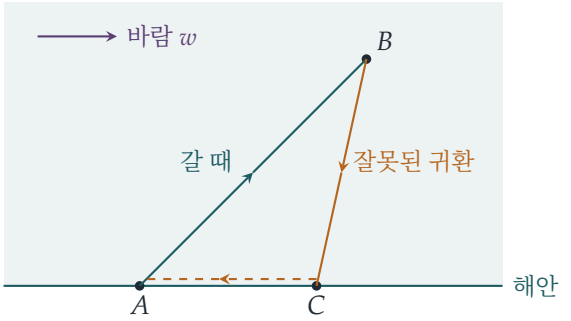
> **STEP III 1994, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q10

핵심 아이디어

모든 것은 벡터 덧셈(vector addition)이다. 지면에 대한 비행기의 속도는 공기에 대한 속도(대기 속도)에 바람의 속도를 더한 것이다. 해안을 x축에 놓고 알파포트(Alphaport)를 원점으로 잡은 다음, 갈 때의 대기 속도를 성분으로 나타낸다. 기수 방향을 반대로 돌리면 대기 속도는 반대가 되지만 바람은 반대가 **되지 않는다**. 그래서 돌아올 때 운동의 북쪽 성분과 동쪽 성분은 매우 다르게 움직이며, 첫 번째 부분의 이야기는 이것이 전부이다. 두 번째 부분에서는 올바른 두 대지 속도가 같은 이차방정식(quadratic)에서 나오므로, 비에트(Vieta)의 공식, 즉 근과 계수의 관계가 일을 대신해 준다.

풀이

비행기를 크기 v인 일정한 대기 속도로 움직이는 입자(particle)로 모형화한다. 이 대기 속도는 정동쪽으로 일정한 속도 w로 움직이는 공기에 대한 속도이다(서쪽**에서** 부는 바람은 동쪽**으로** 분다). 알파포트 A를 원점으로 잡고, x축을 동쪽, y축을 북쪽으로 잡는다. 그러면 해안은 직선 $y = 0$이고 섬은 $y > 0$인 영역에 있다. 베타빌(Betaville) B는 $(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}})$에 있다. 속력의 단위는 $\mathrm{km\,h^{-1}}$, 시간의 단위는 시간(hour)이다. (문제지에서는 장소를 Alphabet/Alphaport, Betaville/Betaport라고 부르는데, 같은 장소이다.)



갈 때의 비행

갈 때의 대기 속도를 (a, b)라 하면 $a^2 + b^2 = v^2$이다. 대지 속도(ground velocity)는 $(a + w,\ b)$이고, 이것은 북동쪽을 향해야 하므로 두 성분이 같고 양수이다.

$$a + w = b > 0.$$

조종사는 y 방향 속력 b로 y 방향 거리 $\frac{d}{\sqrt{2}}$를 이동하고, 갈 때 걸린 시간이 t이므로

$$bt = \frac{d}{\sqrt{2}} = (a + w)t. \tag{1}$$

잘못된 귀환

기수를 반대로 돌리면 대기 속도는 $(-a, -b)$가 되지만 바람은 여전히 $(w, 0)$을 더하므로, 대지 속도는

$$(w - a,\ -b).$$

생각해 보기 조종사는 해안의 어디에, 알파포트의 어느 쪽에 도착하는가?

북쪽 방향의 운동은 바람의 영향을 받지 않는다. y좌표는 $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$에서부터 비율 b로 감소하므로, (1)에 의해 정확히 시간 t 후에, 즉 갈 때와 같은 시간 후에 $y = 0$에 도달한다. 그동안 x좌표는 $(w - a)t$만큼 변하므로, (1)을 다시 쓰면 해안을 지나는 지점은

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} + (w - a)t = (a + w)t + (w - a)t = 2wt,$$

이다. 따라서 조종사는 알파포트에서 **동쪽**으로 거리 $2wt$만큼 떨어진 C에 도착한다. 갈 때는 바람이 비행기를 동쪽으로 밀었고 기수 방향은 그것을 상쇄하도록 정해졌지만, 돌아올 때는 기수 방향의 보정만 반대가 되고 바람이 미는 효과는 반대가 되지 않으므로 표류가 두 배가 된다. $2wt > 0$이므로 해안을 따라 서쪽으로 도는 것이 실제로 올바른 방향이다.

대기 속력 v로 바람을 안고 정서쪽으로 날면 대지 속력은 $v - w > 0$이다($v > w$이므로). 해

안 구간은 $\dfrac{2wt}{v-w}$가 걸리므로, 귀환 전체에 걸리는 시간은

$$t + \frac{2wt}{v-w} = \frac{(v-w)+2w}{v-w}\,t = \left(\frac{v+w}{v-w}\right)t \text{ 시간},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

올바른 귀환

직선 AB 방향의 대지 속도를 $\pm(p, p)$로 쓰자. 여기서 $\sqrt{2}\,p$가 대지 속력이다. 대기 속도는 대지 속도에서 바람을 뺀 것이고, 그 크기는 v이다.

갈 때는 대지 속도가 (p_1, p_1), 대기 속도가 $(p_1 - w,\ p_1)$이다.

$$(p_1 - w)^2 + p_1^2 = v^2 \iff 2p_1^2 - 2wp_1 + (w^2 - v^2) = 0.$$

돌아올 때는 $p_2 > 0$에 대해 대지 속도가 $(-p_2, -p_2)$, 대기 속도가 $(-p_2 - w,\ -p_2)$이다.

$$(p_2 + w)^2 + p_2^2 = v^2 \iff 2(-p_2)^2 - 2w(-p_2) + (w^2 - v^2) = 0.$$

따라서 p_1과 $-p_2$는 모두 같은 이차방정식 $2p^2 - 2wp + (w^2 - v^2) = 0$의 근이다. 이 방정식의 두 근의 곱은 $\frac{w^2-v^2}{2} < 0$이므로 한 근은 양수, 다른 한 근은 음수이다. p_1이 양수인 근이고 $-p_2$가 음수인 근이므로, 이 둘은 서로 다른 두 근이다. 비에트의 공식에 의해

$$p_1 + (-p_2) = w, \qquad p_1(-p_2) = \frac{w^2 - v^2}{2},$$

즉 $p_1 - p_2 = w$이고 $p_1 p_2 = \frac{1}{2}(v^2 - w^2)$이다.

편도 거리는 d이므로 갈 때 걸린 시간은 $t = \dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_1}$이고 올바른 귀환에 걸리는 시간은 $\dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_2}$이다. 따라서

$$\begin{aligned}\frac{d}{\sqrt{2}\,p_2} &= t + \frac{d}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) = t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} \\ &= t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2w}{v^2 - w^2} = t + \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2 - w^2} \text{ 시간},\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

► $w = 0$이면 두 귀환 시간 모두 t가 되는데, 바람이 없을 때 당연히 그래야 한다.

- $v = 300$, $w = 60$, $d = 400$이면 $t \approx 1.1785\,\mathrm{h}$이고, 잘못된 귀환(운동을 수치적으로 한 단계씩 계산하여 구한 값)은 $1.7678\,\mathrm{h} = \frac{360}{240}t$가 걸리며, 올바른 귀환은 $1.5713\,\mathrm{h}$가 걸려 $t + \frac{\sqrt{2}\cdot 60\cdot 400}{86400}$과 일치한다. $v > w$와 d의 여러 값에 대한 무작위 시험에서도 반올림 오차 범위 안에서 일치한다.
- 잘못된 귀환은 항상 올바른 귀환보다 느리다. 이것은 부등식(inequality) $\frac{2wt}{v-w} > \frac{\sqrt{2}wd}{v^2-w^2}$, 즉 $\sqrt{2}(v+w)t > d$인데, $p_2 < v$이므로 갈 때의 대지 속력 $\frac{d}{t} = \sqrt{2}p_1 = \sqrt{2}(p_2 + w)$가 $\sqrt{2}(v+w)$보다 작아서 성립한다.

흔한 실수

- 대기 속도 대신 대지 속도를 반대로 뒤집는 것. 조종사가 방향을 돌린다고 바람까지 방향을 돌리지는 않는다.
- 바람이 서쪽으로 분다고 받아들이는 것. "서쪽에서" 분다는 것은 바람이 비행기를 동쪽으로 실어 나른다는 뜻이다.
- 각 이차방정식을 근의 공식으로 풀고 복잡한 무리수의 역수끼리 빼는 것. p_1과 $-p_2$가 하나의 이차방정식의 근임을 알아차리면 그런 계산을 모두 피할 수 있다.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 형태의 상대 속도(relative velocity)이다. 지면 기준틀에서 본 비행기의 속도는 공기 기준틀에서 본 비행기의 속도에 공기의 속도를 더한 것이며, 이는 갈릴레이 변환(Galilean transformation), 즉 갈릴레이식 기준틀 변환이다. 같은 계산을 꼼꼼히 하는 것이 항법, 대학 1학년 역학의 강 건너기 문제의 바탕이 되며, (빠른 속도에서 이 계산이 성립하지 않게 될 때에는) 특수 상대성 이론(special relativity)의 동기가 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 움직이는 기준틀을 철저하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.