풀이

STEP III 1994, 문제 1

순수수학 • 점화 공식

> **STEP III 1994, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q1

핵심 아이디어

첫 번째 적분에서는 $\operatorname{sech} t$를 $\dfrac{\cosh t}{\cosh^2 t} = \dfrac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}$로 고쳐 쓴다. 분자는 $\sinh t$의 도함수(derivative)이므로, 이 적분은 사실상 아크탄젠트(arctan)이다. 점화식(reduction formula)에서는 $\tanh t$의 도함수인 $\operatorname{sech}^2 t$를 인수로 떼어 내고 부분적분(integration by parts)을 하는 것이 자연스럽다. 그러면 항등식 $\tanh^2 t = 1 - \operatorname{sech}^2 t$에 의해 우변에 I_n이 다시 나타나고, 이를 한쪽으로 모으면 된다.

풀이

$\operatorname{sech} t$의 적분

분모와 분자에 $\cosh t$를 곱하고 $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$를 이용하면

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t} \, \mathrm{d}t.$$

$s = \sinh t$로 치환하면 $\mathrm{d}s = \cosh t \, \mathrm{d}t$이고 적분 구간은 0부터 $\sinh x$까지가 되므로

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\sinh x} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \arctan(\sinh x).$$

$\operatorname{sech} t = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$로 쓰고 $u = \mathrm{e}^t$로 치환하는 방법도 똑같이 좋으며, 이때 답은 $2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$의 꼴로 나온다. 두 답은 일치한다. 둘 다 $x = 0$에서 0이고 도함수가 $\operatorname{sech} x$이기 때문이다. (이 x의 함수를 **구더만 함수**(*Gudermannian*)라고 한다.)

점화식

$n \geq 2$라 하고 $\operatorname{sech}^n t = \operatorname{sech}^{n-2} t \cdot \operatorname{sech}^2 t$로 쓴다. 다음과 같이 놓고 부분적분을 한다.

$$u = \operatorname{sech}^{n-2} t, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \operatorname{sech}^2 t,$$

그러면 $v = \tanh t$이고, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t = -\operatorname{sech} t \tanh t$를 이용하면)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (n-2)\operatorname{sech}^{n-3} t \cdot (-\operatorname{sech} t \tanh t) = -(n-2)\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t.$$

따라서

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t\right]_0^x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \tanh^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \,(1 - \operatorname{sech}^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2) I_{n-2} - (n-2) I_n, \end{aligned}$$

이고, 여기서 $\tanh 0 = 0$이므로 0에서의 경계항은 사라진다.

> **생각해 보기** 제자리를 맴돈 것처럼 보인다. 우변에 I_n이 다시 나타났다. 이것이 문제가 될까?

전혀 그렇지 않으며, 오히려 바로 우리가 원하던 것이다. 우변의 I_n의 계수는 $+1$이 아니라 $-(n-2)$이므로, 이를 좌변으로 옮기면 $(n-1)I_n$이 되고 $n-1 \neq 0$으로 나눌 수 있다. 점화식은 다음과 같다.

$$\boxed{(n-1) I_n = \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\, I_{n-2} \qquad (n \geq 2).}$$

I_5 구하기

홀수 번째 항들은 $I_1 = \arctan(\sinh x)$에서 시작한다. $n = 3$을 대입하면

$$2I_3 = \operatorname{sech} x \tanh x + I_1, \qquad \text{따라서} \qquad I_3 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{1}{2}\arctan(\sinh x).$$

$n = 5$를 대입하면

$$4I_5 = \operatorname{sech}^3 x \tanh x + 3I_3,$$

이므로

$$I_5 = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 x \tanh x + \tfrac{3}{8}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{3}{8}\arctan(\sinh x).$$

I_6 구하기

짝수 번째 항들은 $I_0 = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$에서 시작하거나, 더 직접적으로는 $I_2 = \int_0^x \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t = \tanh x$에서 시작한다(점화식에 $n = 2$를 대입해도 $I_2 = \tanh x + 0$으로 이를 확인할 수 있

다). $n = 4$를 대입하면

$$3I_4 = \operatorname{sech}^2 x \tanh x + 2I_2, \qquad \text{따라서} \qquad I_4 = \tfrac{1}{3}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{2}{3}\tanh x.$$

$n = 6$을 대입하면

$$5I_6 = \operatorname{sech}^4 x \tanh x + 4I_4,$$

이므로

$$I_6 = \tfrac{1}{5}\operatorname{sech}^4 x \tanh x + \tfrac{4}{15}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{8}{15}\tanh x.$$

짝수 거듭제곱에 대한 "다른 방법"

짝수 거듭제곱에는 더 깔끔한 직접적인 방법이 있다. $u = \tanh t$로 치환하면 $\mathrm{d}u = \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t$이고 $\operatorname{sech}^2 t = 1 - u^2$이므로

$$I_6 = \int_0^x (\operatorname{sech}^2 t)^2 \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\tanh x} (1-u^2)^2 \,\mathrm{d}u = \tanh x - \tfrac{2}{3}\tanh^3 x + \tfrac{1}{5}\tanh^5 x.$$

앞에서 구한 답에서 $\operatorname{sech}^2 x$를 $1 - \tanh^2 x$로 바꾸고 전개하면 정확히 이 식이 나오므로, 두 형태는 일치한다.

검산

- $x \to \infty$일 때 $\tanh x \to 1$, $\operatorname{sech} x \to 0$, $\arctan(\sinh x) \to \frac{\pi}{2}$이므로 $I_5 \to \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905$이고 $I_6 \to \frac{8}{15}$이다. 구간 $[0, 30]$에서 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.589049와 0.533333을 얻는다.
- $x = 1$에서 심프슨 공식은 $I_5 \approx 0.561566$, $I_6 \approx 0.518343$을 주며, 이는 위의 공식과 일치한다. 또한 $2 \le n \le 8$에 대하여 임의로 고른 200개의 x 값에서 점화식을 확인하였다.
- sech가 우함수(even function)이므로, I_5와 I_6은 당연히 둘 다 x에 대한 기함수(odd function)이다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t$의 부호를 틀리는 것. 이는 $-\operatorname{sech} t \tanh t$이며, 바로 이 음의 부호 때문에 경계항이 양수가 된다.
- I_n의 두 항을 모은 뒤 $n - 1$이 아니라 n으로 나누는 것.
- 답을 부정적분으로 남겨 두는 것. 적분 구간이 0부터 x까지이므로 적분상수는 없으며, 모든 항은 $x = 0$에서 0이 되어야 한다.

STEP 너머

이와 같은 점화식을 이용하면 적분들의 한 무리 전체를 재귀적으로 계산할 수 있다. 같은 아이디어가 $\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$에 대한 월리스(Wallis) 공식의 바탕이 되며, 이 공식은 π에 대한 유명한 무한곱으로 이어진다. 여기서 구한 극한값 $\int_0^{\infty} \operatorname{sech}^n t \, \mathrm{d}t$는 베타 함수(Beta function)의 값으로, 베타 함수는 대학 1학년 해석학과 확률론에서 중심적인 대상이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에는 점화식 연습 문제가 더 있으며, Abbott의 *Understanding Analysis*는 이상적분(improper integral)을 엄밀하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.