풀이

STEP II 1994, 문제 9

역학 • 강체의 평형

> **STEP II 1994, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q9

핵심 아이디어

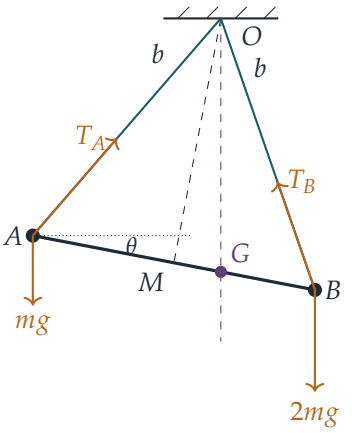
막대, 두 줄, 두 입자를 하나의 강체(rigid body)로 본다. 이 물체에 작용하는 외력은 두 무게와 O에서의 지지력뿐이므로, 평형(equilibrium)을 이루려면 질량중심(centre of mass) G에 작용하는 전체 무게가 O를 지나는 직선을 따라 작용해야 한다. 즉 G는 O의 연직 아래에 매달린다. 이렇게 하면 각을 구하는 문제는 순수하게 이등변삼각형(isosceles triangle)의 기하 문제가 된다. 장력(tension)을 구할 때는 B에 대한 모멘트(moment)를 잡는다. 그러면 B에 작용하는 두 미지의 힘이 모두 사라진다.

풀이

모형. 막대와 줄은 가볍고, 줄은 늘어나지 않으며, A, B는 입자이다. $OA = OB = b$이고 $AB = 2a$이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이다. M을 AB의 중점이라 하자. 그러면 $OM \perp AB$이고, 피타고라스 정리(Pythagorean theorem)에 의해

$$OM = h = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

더 무거운 입자 B가 더 낮게 매달리고, 막대는 수평과 각 θ를 이룬다.



각

막대, 줄, 입자를 모두 합친 전체 계를 생각한다. 이 계에 작용하는 외력은 A에서의 무게 mg, B에서의 무게 $2mg$, 그리고 O에서 지지대가 주는 힘이다. O에 대한 모멘트를 잡으면 지지력의 모멘트는 0이므로, O에 대한 무게들의 모멘트의 합은 0이어야 한다. 두 무게는 평행하므로 입자들의 질량중심 G를 지나는 하나의 힘 $3mg$로 합쳐진다. 이 힘의 O에 대한 모멘트가 0이 되는 것은 G가 O를 지나는 연직선 위에 있을 때뿐이다. 따라서 G는 O의 바로 아래에 있다.

이제 G를 구한다. G는 AB 위에 있고 $AG : GB = 2m : m = 2 : 1$이므로 $AG = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4a}{3}$이고, 따라서

$$MG = AG - AM = \frac{4a}{3} - a = \frac{a}{3},$$

이며 G는 M에 대해 B 쪽에 있다.

? **생각해 보기** 왜 각 MOG가 θ와 같은가?

OG는 연직이고 OM은 막대에 수직이다. 연직선을 OM으로 돌리는 회전은 수평선을 막대로 돌리는 회전과 같으므로, OG와 OM 사이의 각은 막대와 수평선 사이의 각, 곧 θ와 같다.

삼각형 OMG는 M에서 직각이므로

$$\tan\theta = \frac{MG}{OM} = \frac{a/3}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a}{3\sqrt{b^2 - a^2}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

AO의 장력

다시 막대와 입자를 함께 생각한다. 이 계에 작용하는 힘은 AO 방향의 T_A, BO 방향의 T_B, 그리고 두 무게이다. (막대 속의 힘은 내력이다.) B에 대한 모멘트를 잡으면 T_B와 무게 $2mg$가 사라진다.

B에서 직선 OA까지의 수직 거리는 삼각형 OAB의 넓이의 두 배를 OA로 나눈 값이다. 그 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = ah$이므로 거리는 $2ah/b$이다. A에서의 무게 mg의 모멘트 팔(moment arm)은 A와 B 사이의 수평 거리, 즉 $2a\cos\theta$이다. 두 모멘트는 방향이 서로 반대이므로, 이 둘을 같게 놓으면

$$T_A \cdot \frac{2ah}{b} = mg \cdot 2a\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad T_A = \frac{mgb\cos\theta}{h}.$$

θ가 예각이고 $\tan\theta = \dfrac{a}{3h}$이므로 $\cos\theta = \dfrac{3h}{\sqrt{9h^2+a^2}}$이며, $9h^2 + a^2 = 9b^2 - 8a^2$이다. 따라서

$$T_A = \frac{mgb}{h} \cdot \frac{3h}{\sqrt{9b^2-8a^2}} = \frac{3mgb}{\sqrt{9b^2-8a^2}}.$$

(A에 대한 모멘트로 같은 논증을 하면 $T_B = 2T_A$를 얻는다. 즉 각 줄의 장력은 그 줄이 지탱하는 질량에 비례한다.)

검산

- $a \to 0$이면 줄이 연직이 되고 $T_A \to 3mgb/(3b) = mg$인데, 이는 정확히 입자 A를 지탱하는 데 필요한 값이다.
- 전체 계에 대해 연직 방향으로 분해하면 $3mg$가 나와야 한다. $a = 1$, $b = 2$, $m = 1$, $g = 9.8$로 두면 $T_A \approx 11.11\,\mathrm{N}$, $T_B \approx 22.22\,\mathrm{N}$을 얻는다. 이들을 줄의 방향으로 분해하면 연직 성분의 합은 $29.4\,\mathrm{N} = 3mg$이다.
- 무작위로 고른 2000개의 (a, b, m)에 대해 막대를 예측된 각에 놓고, 각 입자에서의 힘의 평형을 따로따로 푸는 수치 검산을 하였다. 두 입자에서 구한 막대의 힘이 일치하며 그 힘은 미는 힘(thrust)이고, 장력은 약 10^{-15}의 오차로 공식과 일치한다.

흔한 실수

- G를 M에서 $\frac{2a}{3}$만큼 떨어진 곳에 두거나 반대쪽에 두는 실수. 질량중심은 더 무거운 입자에 가깝고, 중점에서 $\frac{a}{3}$만큼 떨어져 있다.
- B에 대한 T_A의 모멘트 팔을 $2a$나 b로 잡는 실수. 필요한 것은 B에서 직선 OA까지의 수직 거리이다.
- 답을 m, g, a, b로 나타내라고 했는데 θ를 포함한 채로 남겨 두는 실수.

STEP 너머

한 점에 자유롭게 매달린 물체는 질량중심이 그 점의 아래에 오도록 자리 잡는다는 원리는 더 깊은 사실의 가장 간단한 경우이다. 안정 평형은 위치 에너지(potential energy)를 최소로 하며, 여기서 위치 에너지는 단지 $3mg$에 G의 높이를 곱한 값이다. 대학에서는 이것이 가상일의 원리(virtual work principle)와 라그랑주 역학(Lagrangian mechanics)으로 발전하는데, 여기서는 힘을 분해하는 대신 에너지를 미분하여 평형을 찾는다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 에너지 방법을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.