풀이

STEP II 1994, 문제 8

순수수학 • 이차 모형의 최적화

STEP II 1994, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s2-q8

핵심 아이디어

한 번의 배송 주기 동안 돈의 흐름을 따라가 본다. 재고는 바닥날 때까지 일정한 비율 r로 줄어들므로 $S(t)$는 단순한 경사로 모양이고, 보관 비용은 그 경사로 아래 넓이에 b를 곱한 값이다. 그러면 한 주기당 이익은 X에 대한 이차식(quadratic)이 된다. 이것을 허용 범위 $0 < X \leq rT$에서 최대화하면 조건을 얻는데, 가정 $T \geq p/b$가 바로 포물선(parabola)의 꼭짓점(vertex)을 그 범위 안에 놓이게 하는 조건이다.

풀이

왜 $X \leq rT$인가

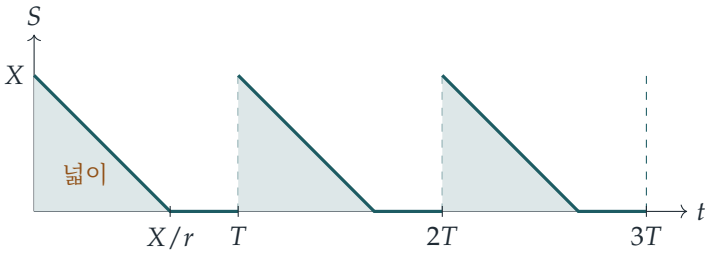
T시간 동안 그녀가 팔 수 있는 양은 많아야 rT단위이다. 만약 $X > rT$이면 다음 트럭이 도착할 때 적어도 $X - rT$단위가 여전히 진열대에 남아 있다. 그러면 매 주기마다 팔리지 않은 잉여분이 적어도 $X - rT$씩 더 늘어나므로, n번의 주기가 지나면 그 양은 적어도 $n(X - rT)$이다. 이 값은 한없이 커지고, 단위당 시간당 b인 보관 비용도 마찬가지로 한없이 커진다. 그녀는 이 물건들의 값을 (그리고 보관 비용을) 치르지만, 어차피 판매량은 주기당 rT로 제한되어 있으므로 이 물건들은 추가 매출을 전혀 만들어 내지 못한다. 따라서 한 번 배송에 rT보다 많이 주문하는 것은 비용만 늘릴 뿐이므로, $X \leq rT$로 잡아야 한다.

재고량

$X \le rT$이면 각 주기는 정확히 X단위로 시작한다. 연속 모형에서 그녀는 재고가 있는 동안 비율 r로 판매하므로

$$S(t) = \begin{cases} X - rt, & 0 \le t \le X/r, \\ 0, & X/r \le t \le T. \end{cases}$$

이 그래프는 X에서 출발하여 $t = X/r$에서 0이 될 때까지 직선으로 내려간 다음, $t = T$에서 다음 배송이 올 때까지 0에서 평평하게 유지된다(그 순간 다시 X로 뛰어오른다). 여러 주기에 걸쳐 보면 톱니 모양이 된다.



한 주기당 이익

T시간의 한 주기 동안:

- **매출**. ($X \le rT$이므로) X단위가 모두 각각 £$(p+q)$에 팔려서 £$(p+q)X$가 된다.
- **배송비**. £$(a + qX)$.
- **보관비**. $S(t)$단위를 짧은 시간 δt 동안 보관하는 비용은 $bS(t)\,\delta t$이므로, 전체 비용은

$$b\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t = b\int_0^{X/r} (X - rt)\,\mathrm{d}t = b \cdot \tfrac{1}{2} \cdot X \cdot \frac{X}{r} = \frac{bX^2}{2r},$$

  즉 색칠한 삼각형의 넓이에 b를 곱한 값이다.

- **운영비**. £cT.

qX 항은 서로 소거되므로 한 주기당 이익은

$$P(X) = pX - \frac{bX^2}{2r} - a - cT.$$

따라서 p가 각 단위에서 얻는 실제 이윤이다. q는 그대로 고객에게 전가될 뿐이다.

언제 사업이 이익을 낼 수 있는가?

T가 고정되어 있을 때 그녀는 범위 $0 < X \le rT$에서 X를 조절할 수 있다. 완전제곱식으로 고치면(completing the square)

$$P(X) = \frac{p^2 r}{2b} - a - cT - \frac{b}{2r}\left(X - \frac{pr}{b}\right)^2.$$

? **생각해 보기** 가장 좋은 X가 실제로 허용되는 값인가?

포물선은 $X = pr/b$에서 최댓값을 가지며, $pr/b \le rT$이어야 하는데 이는 $T \ge p/b$와 같다. 이것이 바로 주어진 가정이다. 따라서 그녀는 $X = pr/b$를 선택할 수 있고, 그러면

$$P = \frac{p^2 r}{2b} - (a + cT).$$

이 값은 정확히 $p^2 r > 2b(a + cT)$일 때, 즉

$$p^2 > 2\,\frac{(a + cT)b}{r}.$$

일 때 양수이다. 그러므로 이 부등식이 성립하면 주문량 $X = pr/b$로 사업이 이익을 내게 되어, 요구한 결과를 얻는다. (사실 pr/b가 가능한 최선의 선택이므로, $T \ge p/b$일 때 이 조건은 필요조건이기도 하다.)

반대로 $T < p/b$이면 꼭짓점이 rT보다 바깥에 있다. 이때 P는 허용 범위 전체에서 증가하므로 그녀가 할 수 있는 최선은 $X = rT$이다. 이 특정한 조건을 얻는 데 T에 대한 가정이 필요한 이유가 바로 이것이다.

검산

- $a = 10$, $b = 1$, $r = 10$, $p = 4$, $c = 1$, $T = 5$로 놓자. 그러면 $T \ge p/b = 4$이고, $p^2 = 16 > 2(15)(1)/10 = 3$이다. 최선의 주문량은 $X = 40 \le rT = 50$이고, 이익은 $160 - 10 - 80 - 5 = 65 = \frac{16 \cdot 10}{2} - 15$이다.
- 무작위로 정한 30개의 매개변수 조합에 대해 컴퓨터로 한 주기 동안 $S(t)$를 수치적으로 계산해 보았더니 $P(X)$와 10^{-7} 이내로 일치했다. 또 $T \ge p/b$인 무작위 사례 2000개에 대해 X를 격자 탐색한 결과 최댓값이 $\frac{p^2 r}{2b} - a - cT$임을 확인했다.
- 단위: $p^2 r/b$의 단위는 (£/단위)$^2 \times$(단위/h)/(£/단위/h) = £이고, a와 cT의 단위도 마찬가지이다.

흔한 실수

- 실제로 보유한 재고에 대한 보관비 $b\int S\,\mathrm{d}t$ 대신 X단위 전체를 T시간 내내 보관한 것으로 계산하는 것(bXT).
- $X = pr/b$가 $X \le rT$를 만족하는지 확인하는 것을 잊는 것. 조건 $T \ge p/b$가 쓰이는 곳은 오직 이 확인 단계뿐이다.

STEP 너머

이것은 운용과학(operations research)의 고전적인 **경제적 주문량**(economic order quantity) 모형이다. 주문 한 번당 드는 고정 비용과 단위 시간당 보유 비용 사이의 균형을 맞추면 제곱근 법칙이 나온다. 여기서 그녀가 T도 선택할 수 있다면, 이익 **비율** P/T는 a와 보관비 사이의 득실을 따져 최대화된다. 이런 종류의 제약 최적화(constrained optimisation)(여기서는 꼭짓점과 경계 $X = rT$ 사이의 비교)는 선형계획법(linear programming)과 비선형계획법(nonlinear programming), 그리고 카루시–쿤–터커 조건(Karush–Kuhn–Tucker conditions)으로 발전한다. 이런 모형을 세우고 검증하는 습관을 기르는 데에는 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*가 좋은 길잡이가 된다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.