풀이

STEP II 1994, 문제 7

순수수학 • 아폴로니오스의 원

> **STEP II 1994, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q7

핵심 아이디어

높이가 h인 깃대의 꼭대기를 거리 r에서 올려다본 앙각(angle of elevation)의 탄젠트는 h/r이다. 따라서 "앙각이 같다"는 것은 곧 병사와 두 깃대 밑동 사이의 거리의 비가 고정된 비 $h_1 : h_2$라는 뜻이다. 이 조건을 제곱하면 첫 번째 부분과 정확히 같은 꼴의 방정식이 나오므로, 자취(locus)는 원(아폴로니오스의 원(circle of Apollonius))이다. 마지막 부분에서는 깃대를 일반적인 위치에 두고 각 중심을 두 밑동의 가중 결합으로 나타낸다. 그러면 항등식이 자연스럽게 나오고, 그 계수들의 합이 0이라는 사실이 세 점이 한 직선 위에 있음(collinearity)을 보장한다.

풀이

원

$a > 0$이므로 a로 나누고 완전제곱식을 만들(completing the square) 수 있다.

$$x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2}.$$

$f^2 + g^2 > ac$이므로 우변은 양수이다. 따라서 이것은

$$\text{중심} \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right), \qquad \text{반지름} \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - ac}}{a}.$$

인 원이다. (이 조건이 없으면 "원"은 한 점이거나 공집합이 된다.)

깃대 두 개

높이가 h_1인 깃대의 밑동을 원점에, 다른 깃대의 밑동을 $(d, 0)$에 둔다. 병사가 (x, y)에 있고 두 밑동으로부터의 거리가 각각 r_1, r_2라면, 앙각 θ_1, θ_2는 $\tan\theta_i = h_i/r_i$를 만족한다. 두 각은 모두 $(0, \frac{\pi}{2})$에 있고 이 구간에서 tan는 일대일(one-to-one)이므로

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} \iff h_2^2 r_1^2 = h_1^2 r_2^2$$

이다. 모든 양이 양수이므로 마지막 단계는 거꾸로도 성립한다. (병사는 밑동 위에 설 수 없다. $r_1 = 0$이면 $r_2 = 0$이어야 하기 때문이다.) 따라서 경로는

$$h_2^2(x^2 + y^2) = h_1^2((x-d)^2 + y^2) \iff (h_2^2 - h_1^2)(x^2 + y^2) + 2h_1^2 d\,x - h_1^2 d^2 = 0.$$

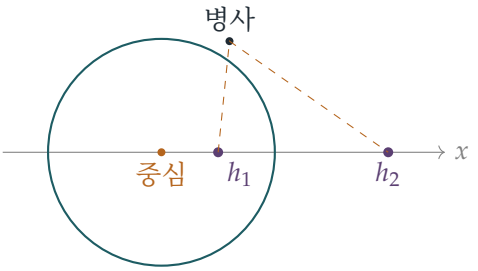
이다. $h_2 > h_1$이 되도록 깃대에 이름을 붙인다(높이가 다르면 하나가 더 높다). 그러면 이것은

$$a = h_2^2 - h_1^2 > 0, \quad g = h_1^2 d, \quad f = 0, \quad c = -h_1^2 d^2,$$

인 첫 번째 부분의 방정식이고,

$$g^2 + f^2 - ac = h_1^4 d^2 + (h_2^2 - h_1^2) h_1^2 d^2 = h_1^2 h_2^2 d^2 > 0.$$

이다. 따라서 병사는 중심이 $\left(-\dfrac{h_1^2 d}{h_2^2 - h_1^2}, 0\right)$이고 반지름이 $\dfrac{h_1 h_2 d}{h_2^2 - h_1^2}$인 원을 따라 행진한다. 중심은 두 밑동을 지나는 직선 위, 낮은 깃대 너머에 있다. 이 원은 낮은 깃대를 둘러싸는데, 이는 당연하다. 낮은 깃대가 높은 깃대만큼 높아 보이게 하려면 낮은 깃대에 더 가까이 서야 하기 때문이다.



($h_1 = 1, h_2 = 2, d = 3$인 경우를 그린 것이다. 중심은 $(-1, 0)$이고 반지름은 2이다.)

$h_1 = h_2$이면 $x^2 + y^2$ 항이 소거되어 방정식은 $2h_1^2 d\,x = h_1^2 d^2$, 즉 $x = \frac{1}{2}d$가 된다. 병사는 두 밑동을 잇는 선분의 수직이등분선(perpendicular bisector)을 따라 걷게 되며, 이는 원이 아니라 직선이다. 이것은 위의 원들의 극한이다. $h_2 \to h_1$일 때 반지름은 무한대로 발산한다.

깃대 세 개

이제는 세 밑동을 모두 한 축 위에 둘 수 없으므로, 높이가 h_i인 깃대가 $\mathbf{p}_i = (p_i, q_i)$에 서 있다고 하자. $r_i^2 = (x-p_i)^2 + (y-q_i)^2$로 놓고 위의 논증을 되풀이하면, 깃대 i와 j를 맡은 병사는

$$(h_j^2 - h_i^2)(x^2+y^2) - 2(h_j^2 p_i - h_i^2 p_j)x - 2(h_j^2 q_i - h_i^2 q_j)y + \text{상수} = 0.$$

을 따라 걷는다. 이것은 원이다(원점을 옮겨도 g^2+f^2-ac의 값은 변하지 않으므로, $h_j < h_i$이면 전체에 -1을 곱한 뒤에도 여전히 $h_i^2 h_j^2 |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|^2 > 0$이다). 첫 번째 부분을 이용하면 그 중심 $\mathbf{c}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$는

$$(h_j^2 - h_i^2)\,\mathbf{c}_{ij} = h_j^2 \mathbf{p}_i - h_i^2 \mathbf{p}_j.$$

를 만족한다. 이 식은 i와 j를 바꾸어도 변하지 않으므로(양변의 부호가 함께 바뀐다), $\mathbf{c}_{31}$에 어느 쪽 순서로 이름을 붙이든 상관없다.

생각해 보기 아무것도 풀지 않고 이런 공식 세 개를 주어진 항등식으로 바꾸려면 어떻게 해야 할까?

항등식의 각 항에는 이미 x_{ij} 옆에 인수 $\pm(h_j^2 - h_i^2)$가 붙어 있으므로, 위의 공식을 바로 대입할 수 있다. 벡터를 써서 x좌표와 y좌표를 한꺼번에 처리하자.

$$\begin{aligned}
h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} &= -h_3^2(h_2^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_2) = -h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 + h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2,\\
h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} &= -h_1^2(h_3^2\mathbf{p}_2 - h_2^2\mathbf{p}_3) = -h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2 + h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3,\\
h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} &= \quad h_2^2(h_3^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_3) = \quad h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 - h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3.
\end{aligned}$$

더하면 모든 항이 짝지어 소거되므로

$$h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} + h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} + h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} = \mathbf{0}.$$

이다. x성분은 x_{ij} 사이의 구하는 관계식이고, y성분은 y_{ij} 사이의 같은 관계식이다.

생각해 보기 세 점 사이의 선형 관계(linear relation)가 왜 세 점을 한 직선 위에 있게 만들까?

세 계수를 $A = h_3^2(h_1^2 - h_2^2)$, $B = h_1^2(h_2^2 - h_3^2)$, $C = h_2^2(h_3^2 - h_1^2)$라 하자. 높이는 모두 양수이고 서로 다르므로 A, B, C 중 어느 것도 0이 아니다. 핵심이 되는 추가 사실은 이들의 합이 0이라는 것이다.

$$A + B + C = h_1^2 h_3^2 - h_2^2 h_3^2 + h_1^2 h_2^2 - h_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2 - h_1^2 h_2^2 = 0.$$

따라서 $C = -A - B$이고, 관계식은

$$A(\mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31}) + B(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}) = \mathbf{0}, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31} = -\frac{B}{A}\,(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}).$$

가 된다. $\mathbf{c}_{31}$에서 나머지 두 중심으로 가는 벡터가 평행하므로(두 중심이 일치하면 하나는 영벡터이다), 세 중심은 한 직선 위에 있다. $A+B+C=0$이 없다면 선형 관계만으로는 아무것도 증명할 수 없다. 임의의 세 점은 그런 꼴의 관계식을 어떤 것이든 하나는 만족하기 때문이다.

검산

- $h_1=1, h_2=2, d=3$이면 우리 공식은 중심 $(-1,0)$, 반지름 2를 준다. 점 $(1,0)$은 두 밑동으로부터 거리가 1과 2이고, $(-3,0)$은 거리가 3과 6이다. 둘 다 비가 $1:2$로, 마땅히 그래야 하는 대로이다.
- 수치 검산으로 각 원 위에 무작위로 점을 잡아 두 앙각이 일치함을 확인했다. 또한 무작위 위치에 놓인 깃대 세 개의 무작위 조합 2000개에 대해 항등식과 세 중심이 한 직선 위에 있음도 확인했다.
- 세 중심이 한 직선 위에 있으리라 기대할 또 다른 이유가 있다. 어떤 점이 두 원 위에 있으면 $r_1:r_2=h_1:h_2$이고 $r_2:r_3=h_2:h_3$이므로 $r_1:r_3=h_1:h_3$이 되어 그 점은 세 번째 원 위에도 있다. 원들이 만나면 모두 같은 두 점을 지나므로, 그 중심들은 모두 그 두 점의 수직이등분선 위에 있다.

흔한 실수

- 각이 같으면 왜 탄젠트가 같은지(두 각이 모두 예각이다) 말하지 않고 $h_1/r_1=h_2/r_2$로 놓는 것.
- $g^2+f^2>ac$를 확인하지 않는 것. 첫 번째 부분은 이 조건 아래에서만 원을 준다.
- $A+B+C=0$과 $A,B,C\neq 0$을 쓰지 않고 항등식만으로 세 점이 한 직선 위에 있다고 결론짓는 것.

STEP 너머

두 고정점으로부터의 거리의 비가 고정된 값 $k\neq 1$인 점들의 집합을 **아폴로니오스의 원**이라 한다. k의 모든 값을 택하면 원들의 **공축 원족**(coaxal system)을 얻는데, 이는 어느 두 원도 같은 근축(radical axis)을 공유하는 원들의 모임이다. 이런 원족에서 반전 기하학(inversive geometry)이 시작되며, 복소평면(complex plane)에서 이들은 원 $|z-a|=k|z-b|$이고, 뫼비우스(Möbius) 변환은 이 원들을 서로에게 옮긴다. 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 공축 원과 반전을 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 쪽 관점을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.