풀이

STEP II 1994, 문제 6

순수수학 • 삼각함수의 망원급수

> **STEP II 1994, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q6

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 작은 항등식 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$에 달려 있다. 이 항등식은 합의 각 항을 $\frac{1}{2^r}\cot\frac{\theta}{2^r}$ 꼴의 연속한 두 항의 차로 바꾸어 주므로 합이 연쇄적으로 소거(telescoping)되고, 바로 이 항등식이 귀납 단계를 성립하게 만든다. 그러면 무한급수에는 극한 $\frac{\sin\varphi}{\varphi}\to 1$만 있으면 된다.

풀이

유용한 항등식

$\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$가 모두 0이 아닌 임의의 x에 대하여

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x,$$

이므로

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x. \qquad (*)$$

이다. $(*)$는 $r \geq 1$일 때 $x = \theta/2^r$인 경우에만 사용한다. $0 < \theta < \pi$이므로 이러한 x는 $(0, \frac{\pi}{2})$에 속하고, 따라서 $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$가 모두 양수이며 앞으로 쓰는 모든 tan와 cot이 정의된다.

유한합: 수학적 귀납법으로

좌변 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r}$를 S_n이라 쓰고, $P(n)$을 다음 명제라 하자.

$$S_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - \cot\theta.$$

기저 단계(*base case*) $n = 1$. $(*)$에 $x = \theta/2$를 대입하고 2로 나누면

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{\theta}{2} - \cot\theta,$$

이고, 이것이 $P(1)$이다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $k \geq 1$에 대하여 $P(k)$가 성립한다고 가정하자. $(*)$에 $x = \theta/2^{k+1}$를 대입하면 $2x = \theta/2^k$이고, 양변을 2^{k+1}로 나누면

$$\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}.$$

이다. 이것을 $P(k)$에 더하면

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k} - \cot\theta\right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \cot\theta, \end{aligned}$$

이고, 이것이 $P(k+1)$이다. 따라서 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 $n \geq 1$과 모든 $\theta \in (0, \pi)$에 대하여 $P(n)$이 성립하며, 이것이 증명하려던 것이다.

생각해 보기 항등식 $(*)$를 처음 본다면 어떻게 찾아낼 수 있을까?

귀납법에서 거꾸로 거슬러 올라가 보자. $n = k$에서 $n = k+1$로 갈 때 우변은 $\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}$만큼, 좌변은 $\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}}$만큼 변한다. 2^{k+1}을 곱하고 $x = \theta/2^{k+1}$로 쓰면, 두 변화량은 정확히 $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$일 때 같아진다. 즉 문제 자체가 어떤 항등식을 증명해야 하는지 알려 주며, 그다음에는 배각 공식(double-angle formulae)으로 확인하면 된다.

무한급수

모든 항이 양수이고 부분합에 대한 정확한 공식이 있으므로, $n \to \infty$일 때 S_n의 극한을 구하기만 하면 된다. $\varphi_n = \theta/2^n$이라 하면 $\varphi_n \to 0^+$이고 $\frac{1}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}$이다. 그러면

$$\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}\cdot\frac{\cos\varphi_n}{\sin\varphi_n} = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\cdot\cos\varphi_n \longrightarrow \frac{1}{\theta}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{\theta},$$

이다. 여기서 $\varphi \to 0$일 때의 잘 알려진 극한 $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$과 $\cos\varphi \to 1$을 사용하였다. $\cot\theta$는 n에 의존하지 않으므로

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\theta} - \cot\theta,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 특히 이 급수는 모든 $\theta \in (0, \pi)$에 대하여 수렴(converge)한다.

생각해 보기 "무한급수의 합은 S_n의 극한과 같다"고 말해도 되는 이유는 무엇일까?

그것이 바로 무한급수의 합의 정의이다. 즉 $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$는 극한 $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} a_r$가 존재할 때 그 극한을 뜻한다. 우리는 극한을 직접 계산하여 그것이 존재함을 보였으므로 더 필요한 것은 없다.

검산

- $\theta = \frac{\pi}{2}$: 우변은 $\frac{2}{\pi} - 0 \approx 0.63662$이다. 급수의 처음 60개 항을 수치적으로 더해도 0.6366198이 나온다.
- $\theta = 1$: 급수와 $1 - \cot 1$ 모두 0.3579074이다.
- 작은 θ: $\tan\frac{\theta}{2^r} \approx \frac{\theta}{2^r}$이므로 급수는 대략 $\theta\sum 4^{-r} = \frac{\theta}{3}$이다. 이는 전개식 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta = \frac{\theta}{3} + O(\theta^3)$과 일치한다.
- $\theta \to \pi^-$일 때 $\cot\theta \to -\infty$이고 첫째 항 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} \to +\infty$이므로, 마땅히 그래야 하듯 양변이 함께 발산한다.

흔한 실수

- $(*)$에서 인수 2를 잘못 쓰는 것. 예를 들어 $\tan x = \cot x - \cot 2x$라고 쓰는 경우이다. $x = \frac{\pi}{4}$에서 확인해 보라: $1 = 1 - 2\cdot 0$.
- $\frac{1}{2^n} \to 0$이므로 $\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} \to 0$이라고 주장하는 것. 코탄젠트는 $2^n/\theta$처럼 커지므로 곱은 0이 아니라 $\frac{1}{\theta}$로 수렴한다.
- 탄젠트와 코탄젠트가 정의되는 이유를 말하지 않는 것. 모든 각 $\theta/2^r$을 $(0, \frac{\pi}{2})$ 안에 머무르게 하는 것은 조건 $0 < \theta < \pi$이다.

STEP 너머

함수 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta$는 유명한 함수족에 속한다. 부분분수 전개(partial-fraction expansion) $\cot\theta = \frac{1}{\theta} + \sum_{k\geq 1}\frac{2\theta}{\theta^2 - k^2\pi^2}$를 미분하면 바젤 문제(Basel problem)의 합 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$을 얻으며, 오일러(Euler)는 $\sin\theta$의 무한곱(infinite product)으로부터 이러한 결과들을 얻었다. 비에트(Viète)의 곱 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{r\geq 1}\cos\frac{\theta}{2^r}$에 로그를 취하고 미분하면 정확히 이 문제의 급수가 나오며, 이것은 결과를 이해하는 또 다른 방법이다. 무한급수와 무한곱의 이러한 조작을 엄밀하게 만드는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.