풀이

STEP II 1994, 문제 5

순수수학 • 실근의 개수 세기

> **STEP II 1994, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q5

핵심 아이디어

$f(x) = c$의 근(root)의 개수를 센다는 것은 수평선 $y = c$가 f의 그래프와 몇 번 만나는지를 묻는 것이다. 따라서 중요한 것은 f의 모양, 곧 어디에서 가장 작아지고 어디에서 증가하거나 감소하는지이다. 여기 나오는 식은 모두 어떤 중심점에 대하여 대칭으로 놓인 두 괄호로 이루어져 있다. 중심이 원점이 되도록 변수를 평행이동하면 홀수 차수 항이 소거되거나(네제곱의 경우) 짝수 차수 항이 소거되어(세제곱의 경우) 모양이 한눈에 드러난다.

풀이

소문항 (i)

이항정리(binomial theorem)로 전개한다. $(x+1)^4$과 $(x-1)^4$에서 x의 홀수 차수 항은 부호가 반대이므로 합에서 소거된다.

$$f(x) = (x-1)^4 + (x+1)^4 = 2(x^4 + 6x^2 + 1) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

따라서 f는 우함수(even function)이고 $f(x) = 2 + 2x^4 + 12x^2 \geq 2$이며, 등호는 $x = 0$일 때만 성립한다. $x \geq 0$에서 $x > 0$이면 $f'(x) = 8x^3 + 24x > 0$이므로 f는 $[0, \infty)$에서 순증가(strictly increasing)하고, $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이다. f는 연속(continuous)이므로 $[0, \infty)$에서 $[2, \infty)$의 모든 값을 정확히 한 번씩 취한다. 대칭성에 의해 $(-\infty, 0]$에서도 마찬가지이다.

- $c > 2$인 경우: 근 $x = a > 0$이 정확히 하나 있고, 그러면 $x = -a$가 두 번째 근이다. 두 근은 서로 다르며 다른 근은 없다. 따라서 실근은 **정확히 두 개**이다.
- $c = 2$인 경우: $f(x) = 2$이면 $2x^4 + 12x^2 = 0$이어야 하므로 $x = 0$이 **유일한** 근이다.

▶ $c < 2$인 경우: 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 2 > c$이므로 근이 **없다**.

이것이 바로 요구된 결과이다.

(다른 방법으로, $2x^4 + 12x^2 + 2 - c = 0$은 $u = x^2$에 대한 이차방정식이고 그 근은 $u = -3 \pm \sqrt{8 + c/2}$이다. 음이 아닐 수 있는 것은 $+$ 쪽 근뿐이며, 이 근은 $c > 2$, $c = 2$, $c < 2$에 따라 각각 양수, 0, 음수이다.)

소문항 (ii)

괄호 $x - 3$과 $x - 1$의 중심은 $x = 2$이므로 $y = x - 2$로 놓는다. 그러면

$$(x-3)^4 + (x-1)^4 = (y-1)^4 + (y+1)^4,$$

이고, 이는 변수 y에 대한 소문항 (i)의 식이다. $x \mapsto y = x - 2$는 실수 사이의 일대일대응(one-to-one correspondence)이므로, 이 방정식의 실근의 개수는 소문항 (i)과 같다.

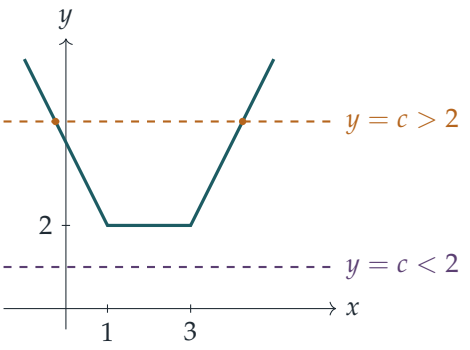
$$\text{근 두 개, 단} c > 2, \qquad \text{근 한 개} (x = 2), \text{단} c = 2, \qquad \text{근 없음, 단} c < 2.$$

소문항 (iii)

$g(x) = |x - 3| + |x - 1|$이라 하고, $x = 1$과 $x = 3$으로 나뉜 세 구간 각각에서 절댓값(modulus) 기호를 없앤다.

$$g(x) = \begin{cases} (3-x) + (1-x) = 4 - 2x, & x < 1, \\ (3-x) + (x-1) = 2, & 1 \leq x \leq 3, \\ (x-3) + (x-1) = 2x - 4, & x > 3. \end{cases}$$

따라서 그래프는 바닥이 평평한 V자 모양이다. 1과 3 사이에서는 2로 일정하고, 왼쪽에서는 순감소, 오른쪽에서는 순증가하며, $[1, 3]$ 바깥에서는 $g > 2$이다.



▶ $c < 2$인 경우: 모든 곳에서 $g(x) \geq 2 > c$이므로 근이 **없다**.

- $c = 2$인 경우: $1 \le x \le 3$인 모든 x가 근이고 그 바깥에는 근이 없으므로, 근은 **무수히 많다**.
- $c > 2$인 경우: $[1,3]$에는 근이 없다. $x < 1$에서는 $4 - 2x = c$로부터 $x = 2 - \frac{c}{2}$를 얻는데, $c > 2$이므로 이 값은 실제로 1보다 작다. $x > 3$에서는 $2x - 4 = c$로부터 $x = 2 + \frac{c}{2} > 3$을 얻는다. 따라서 근은 **정확히 두 개**이며, $x = 2 \pm \frac{c}{2}$이다.

? **생각해 보기** $c = 2$일 때의 답이 소문항 (ii)와 이토록 다른 까닭은 무엇인가?

네제곱의 경우에는 두 항이 모두 순볼록(strictly convex)하므로 합은 중심점에서 하나의 뾰족한 최솟값을 가진다. 절댓값의 경우에는 x를 1과 3 사이에서 움직이면 한쪽 거리가 늘어나는 만큼 다른 쪽 거리가 정확히 줄어들므로, 합은 구간 전체에서 2(1과 3 사이의 거리)로 유지된다.

소문항 (iv)

다시 $y = x - 2$로 놓는다. 세제곱의 경우에는 y의 짝수 차수 항이 소거된다.

$$(x-3)^3 + (x-1)^3 = (y-1)^3 + (y+1)^3 = 2y^3 + 6y.$$

$h(y) = 2y^3 + 6y$라 하자. 그러면 모든 실수 y에 대하여

$$h'(y) = 6y^2 + 6 \ge 6 > 0$$

이므로 h는 실수 전체에서 순증가하고, 따라서 각 값을 많아야 한 번 취한다. 또한 $y \to \infty$일 때 $h(y) \to \infty$이고 $y \to -\infty$일 때 $h(y) \to -\infty$이며 h는 연속이므로, 중간값 정리(intermediate value theorem)에 의해 모든 실숫값을 적어도 한 번 취한다.

그러므로 **모든** 실수 c에 대하여 이 방정식은 **정확히 하나의** 실근을 가진다.

검산

- 중심점 $x = 2$에서 두 네제곱 식은 모두 $1 + 1 = 2$이 되어 $c = 2$인 경우와 맞아떨어지고, $(2-3)^3 + (2-1)^3 = 0$이다.
- 소문항 (iv)에서 $c = 8$이면 $x = 3$이 나와야 한다. 실제로 $0^3 + 2^3 = 8$이고, $y = 1$일 때 $h(1) = 2 + 6 = 8$이다.
- 소문항 (iii)에서 $c = 4$이면 근 $x = 0$과 $x = 4$는 각각 $3 + 1 = 4$와 $1 + 3 = 4$를 준다.

임의의 점들에서 전개식이 성립함을 수치적으로 확인했고, 여러 c 값(예를 들어 (i)과 (ii)에서는 $c = 1.9, 2.5, 100$, (iv)에서는 -1000부터 5000까지의 c)에 대하여 각 함수에서 c를 뺀 것의 부호 변화를 촘촘한 격자 위에서 세었다. 그 개수는 주장한 대로 0, 2, 2였고 (iv)에서는 항상 1이었다.

흔한 실수

- 소문항 (iii)에서 $c = 2$일 때 "근 한 개" 또는 "근 두 개"라고 답하는 것. 구간 $1 \leq x \leq 3$ 전체가 근으로 이루어져 있다.
- 소문항 (iv)에서 삼차방정식이 "실근을 한 개 또는 세 개 가진다"고만 하고 어느 쪽인지 정하지 않는 것. 모든 곳에서 $h'(y) > 0$이라는 사실이 이를 결정해 준다.
- $x = 2 - \frac{c}{2}$가 식 $4 - 2x$를 사용한 영역 $x < 1$에 실제로 속하는지 확인하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서의 논증은 해석학(analysis) 입문 강의에서 엄밀하게 증명하는 두 정리에 기대고 있다. 하나는 중간값 정리(구간에서 연속인 함수는 그 사이의 모든 값을 취한다)이고, 다른 하나는 도함수가 양수인 함수는 순증가한다는 사실로, 이는 평균값 정리(mean value theorem)에서 따라 나온다. 소문항 (iii)은 볼록성(convexity)과 ℓ^1 거리를 처음 맛보는 경험이기도 하다. 두 점까지의 거리의 합은 두 점 사이의 선분 전체에서 최소가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이러한 아이디어를 엄밀하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.