풀이

STEP II 1994, 문제 4

순수수학 • 타원의 넓이

> **STEP II 1994, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q4

핵심 아이디어

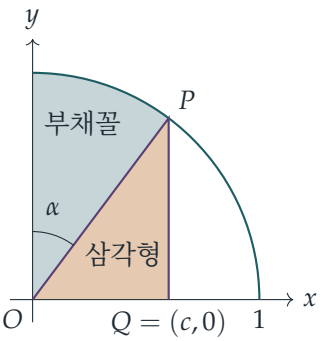
첫 번째 적분은 사분원(quarter circle) 아래의 넓이이고, 이 넓이는 직각삼각형(right-angled triangle) 하나와 원의 부채꼴(sector) 하나로 깔끔하게 나뉘므로 치환(substitution)이 필요 없다. 타원(ellipse)은 원을 두 방향으로 서로 다른 배율만큼 늘인 것이고, 늘이기(stretching)는 넓이에 상수를 곱하므로 두 번째 결과가 곧바로 나온다. 마지막 부분에서는 대칭성(symmetry)이 거의 모든 일을 해 준다. 두 타원은 직선 $y = x$에 대해 서로의 반사(reflection)이므로 교집합(intersection)의 8분의 1만 구하면 되고, 그 조각은 두 번째 결과에서 삼각형 하나를 뺀 것이다.

풀이

$(1 - x^2)^{1/2}$의 적분

문제의 영역은 사분원 $y = (1 - x^2)^{1/2}$, 두 좌표축, 그리고 직선 $x = c$로 둘러싸여 있다. (곡선은 경계로 읽어야 한다. 즉 영역은 $0 \le y \le (1 - x^2)^{1/2}, 0 \le x \le c$를 만족하는 점들의 집합이다.) 이 영역의 넓이가 바로 우리가 구하려는 적분이다.

$P = (c, (1 - c^2)^{1/2})$를 $x = c$ 위에 있는 원 위의 점, $Q = (c, 0)$이라 하고, $\alpha = \sin^{-1} c$라 하면 $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$이다. O와 P를 이으면 영역이 두 조각으로 나뉜다.



- 삼각형 OQP는 Q에서 직각이고, 밑변이 c, 높이가 $(1-c^2)^{1/2}$이므로 넓이는 $\frac{1}{2}c(1-c^2)^{1/2}$이다.
- 나머지는 OP와 y축 사이에 있는 단위원의 부채꼴이다. P에서 y축까지의 수평 거리가 $c = 1 \cdot \sin\alpha$이므로 OP와 y축 사이의 각은 α이다. 반지름이 1이고 중심각이 α인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}c$이다.

두 조각을 더하면

$$\int_0^c (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[c(1-c^2)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}c\right], \qquad 0 < c \le 1,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다. ($c = 1$이면 삼각형이 납작해져서 사분원의 넓이 $\frac{\pi}{4}$를 얻는다.)

타원 아래의 넓이

이번에도 영역은 $0 \le x \le c$에서 곡선의 위쪽 절반 $y = b\left(1 - x^2/a^2\right)^{1/2}$ 아래에 있으므로, 넓이는

$$\int_0^c b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

이다. $x = au$로 치환하면 $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$이고 적분 구간은 0부터 c/a까지가 된다($0 < c \le a$이므로 $0 < c/a \le 1$이다). 그러면 이 적분은

$$ab\int_0^{c/a}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{ab}{2}\left[\frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)\right],$$

이다. 여기서 첫 번째 결과의 c를 c/a로 바꾸어 썼다. 이것이 구하는 넓이이다.

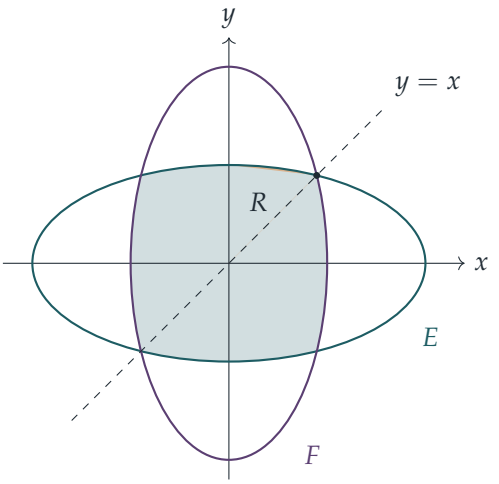
기하학적으로 보면, 타원은 단위원을 가로로 a배, 세로로 b배 늘인 것이고, 이 늘이기는 모든 넓이에 ab를 곱한다.

두 타원의 교집합

E와 F는 모두 $x \mapsto -x$와 $y \mapsto -y$에 대해 변하지 않으므로 $E \cap F$도 그렇고, 따라서 그 넓이는 사분면 $x, y \geq 0$에 있는 부분의 넓이의 네 배이다. 또 x와 y를 맞바꾸면 E는 F가 되고 F는 E가 되므로, $E \cap F$는 직선 $y = x$에 대해 대칭이다. 따라서 제1사분면에 있는 4분의 1 조각은 서로 거울상인 두 절반으로 이루어지고,

$$\text{넓이}(E \cap F) = 8 \times \text{넓이} R, \qquad R = \{(x, y) \in E \cap F : \ 0 \leq x \leq y\}.$$

이다.



생각해 보기 R에서 실제로 경계를 이루는 것은 두 타원 중 어느 것인가?

임의의 점에 대하여

$$\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = (x^2 - y^2)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

이다. $0 \leq x \leq y$이면 $x^2 - y^2 \leq 0$이고, $0 < b \leq a$이므로 $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \geq 0$이다. 따라서 이 차는 ≤ 0이다. 즉 $y = x$의 그쪽 편에서는 E에 속하는 점이 자동으로 F에도 속한다. 그러므로

$$R = \{(x, y) \in E : \ 0 \leq x \leq y\},$$

이고 E만 신경 쓰면 된다. (바로 여기서 $b \leq a$가 쓰인다. $b > a$이면 두 타원의 역할이 뒤바뀐다.)

E의 경계는 제1사분면에서 $x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$인 곳, 즉 $x = y = x_0$에서 $y = x$와 만나며, 여기서

$$x_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

이다. $0 \le x \le x_0$에서는 E의 위쪽 절반이 $y = x$ 위에 있거나 그 위쪽에 있고(높이 $b > 0$에서 시작하여 x_0에서만 직선과 만난다), $x > x_0$에서는 직선 아래에 있다. 따라서 R은 $0 \le x \le x_0$에서 $y = x$와 곡선 $y = b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ 사이의 영역이다.

$$\text{넓이}(R) = \underbrace{\int_0^{x_0} b\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x}_{\text{앞의 결과에서 } c = x_0} - \underbrace{\tfrac{1}{2}x_0^2}_{\text{삼각형 넓이, 직선 } y = x}.$$

$c = x_0$으로 두면(필요한 대로 $0 < x_0 < a$이다)

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \frac{c}{a}\Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \text{넓이}(E \cap F) &= 8\,\text{넓이}(R) \\ &= 4ab\left[\frac{ab}{a^2 + b^2} + \sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big)\right] - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \\ &= 4ab\sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big), \end{aligned}$$

이다. 두 대수적 항이 정확히 상쇄되기 때문이다. 이것이 구하는 넓이이다.

? **생각해 보기** 왜 대수적 항들이 상쇄되는가?

항 $\frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{a}(1 - c^2/a^2)^{1/2} = \frac{1}{2}x_0y_0$은 원 그림의 삼각형 O, $(x_0, 0)$, (x_0, y_0)을 늘인 것이다. 여기서 $y_0 = x_0$이므로, 이것은 우리가 빼는 $y = x$ 아래의 삼각형과 정확히 같다. 남는 것은 늘인 부채꼴이고, 그래서 답이 순수한 역사인 함수 하나로 나온다.

검산

- $a = b$이면 두 타원은 같은 원이고, 공식은 $4a^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi a^2$을 주므로 마땅히 그래야 하는 값이 나온다.
- a를 고정하고 $b \to 0$이면 넓이는 $4ab \cdot \frac{b}{a} = 4b^2$처럼 행동한다. 교집합은 E의 가는 가로띠가 F의 가는 세로 띠와 교차하는 곳에 생기는, 한 변이 $2b$인 정사각형에 가깝다.
- $a = 2$, $b = 1$일 때 공식은 $8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 3.70918$을 준다. 두 경계 중 아래쪽 것에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 3.70918이 나오고, 2×10^5개의 점으로 한 몬테카를로(Monte Carlo) 추정값은 3.707이다. 앞의 두 결과도 무작위로 고른 여러 a, b, c에 대해 수치 적분(quadrature)으로 확인하였다.

흔한 실수

- 부채꼴의 각을 잘못 잡는 것: 부채꼴은 OP와 y축 사이에 있고, 그 각은 $\cos^{-1} c$가 아니라 $\sin^{-1} c$이다.
- 어느 타원이 영역의 경계인지 확인하지 않는 것. 절반 $0 \leq x \leq y$에서 경계가 E인 것은 오직 $b \leq a$이기 때문이다. 반대로 고르면 역사인 함수 안에 b 대신 a가 들어간 답이 나온다.

STEP 너머

선형사상(linear map) $(x, y) \mapsto (ax, by)$는 모든 넓이에 ab를 곱하고, 일반적으로 선형사상은 넓이에 그 행렬식(determinant)의 절댓값을 곱한다. 이것은 대학 1학년 미적분학에서 배우는 중적분(multiple integral)의 변수 변환 공식(change-of-variables formula)에 나오는 야코비안(Jacobian) 인수의 2차원 경우이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 행렬식을 넓이(와 부피)의 배율로 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.