풀이

STEP II 1994, 문제 3

순수수학 • 함수방정식

> **STEP II 1994, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q3

핵심 아이디어

f에 대해 아는 것은 모든 x와 y에 대해 성립하는 항등식(identity) 하나와 값 하나, 즉 $f(0) = 1$뿐이다. 따라서 쓸 수 있는 도구는 대입(substitution)뿐이다. 대부분의 인수가 0이나 a가 되도록 x와 y를 고르면, 그 점에서의 값은 이미 알고 있거나 곧 알게 된다. 이 항등식을 보면 $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$가 떠올라야 한다. 여기서 $f(a-x)$가 $\pm \sin x$의 역할을 한다. 이 유사성은 어떤 결과를 기대해야 하는지, 그리고 예가 무엇이 될지를 모두 알려 준다.

풀이

이하에서 주어진 항등식을 다음과 같이 쓴다.

$$f(x-y) = f(x)\,f(y) - f(a-x)\,f(a+y) \qquad \text{모든} x, y. \qquad (*)$$

아래의 모든 단계는 $(*)$에 대한 대입이므로, 연속성(continuity), 미분가능성(differentiability) 등 어떤 가정도 하지 않는다.

$f(a) = 0$임을 보이기

$(*)$에 $x = y = 0$을 대입하면

$$f(0) = f(0)^2 - f(a)\,f(a), \qquad \text{따라서} \qquad 1 = 1 - f(a)^2.$$

그러므로 $f(a)^2 = 0$이고, $f(a)$는 실수이므로 $f(a) = 0$이다.

소문항 (i)

$(*)$에 $x = 0, y = t$를 대입하면

$$\mathrm{f}(-t) = \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a+t) = 1 \cdot \mathrm{f}(t) - 0 = \mathrm{f}(t),$$

이다. 여기서 $\mathrm{f}(0) = 1$과 $\mathrm{f}(a) = 0$을 이용하였다. 따라서 f는 우함수(even function)이다.

소문항 (ii)

$(*)$에 $x = y = a$를 대입하면

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)^2 - \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(2a), \qquad \text{따라서} \qquad 1 = 0 - \mathrm{f}(2a),$$

이므로 $\mathrm{f}(2a) = -1$이다.

소문항 (iii)

> **생각해 보기** 우변의 첫 번째 곱을 없애면서도 t를 자유롭게 남겨 두는 대입 하나는 무엇인가?

$x = a$로 두면 $\mathrm{f}(a) = 0$이므로 항 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$가 사라지고, $\mathrm{f}(a-x)$는 $\mathrm{f}(0) = 1$이 되며, y는 여전히 자유롭다. $x = a$일 때 $(*)$는 다음이 된다.

$$\mathrm{f}(a-y) = 0 \cdot \mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(a+y) = -\mathrm{f}(a+y) \qquad \text{모든} y.$$

즉 f는 "a에 관한 기함수(odd function)"이다. 이제 $y = a - t$로 택하면 $a - y = t$이고 $a + y = 2a - t$이므로

$$\mathrm{f}(t) = -\mathrm{f}(2a - t),$$

이다. 이는 모든 t에 대해 $\mathrm{f}(2a-t) = -\mathrm{f}(t)$라는 뜻이므로 요구한 결과가 성립한다. ($t = 0$을 대입하면 소문항 (ii)가 다시 나오는데, 이는 유용한 일관성 점검(consistency check)이다.)

소문항 (iv)

(iii)을 두 번 적용하되, 그 사이에 (i)을 쓴다. 먼저 (iii)에서 t를 $-t$로 바꾸면

$$\mathrm{f}(2a+t) = -\mathrm{f}(-t) = -\mathrm{f}(t), \tag{1}$$

이다. 여기서 (i)을 이용하였다. 즉 인수를 $2a$만큼 옮기면 부호가 바뀐다. 다시 $2a$만큼 옮기면, 즉 (1)에서 t를 $2a + t$로 바꾸어 적용하면

$$\mathrm{f}(4a+t) = -\mathrm{f}(2a+t) = -(-\mathrm{f}(t)) = \mathrm{f}(t).$$

따라서 ($a \neq 0$일 때) f는 주기(period)가 $4a$인 주기함수이며, 이는 주기가 $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$인 코사인과 정확히 같다.

예

$a = \pi/2$인 경우. $\mathrm{f}(x) = \cos x$로 잡는다. 그러면 $\mathrm{f}(0) = 1$이고, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin y$이므로

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} - x)\mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \mathrm{f}(x - y).$$

$a = -2$인 경우. $\mathrm{f}(x) = \cos kx$를 시도해 보자. 위의 결과에 따르면 $\mathrm{f}(a) = 0$, 즉 $\cos(2k) = 0$이어야 하고, 주기는 $4|a| = 8$이어야 한다. 따라서 $k = \frac{\pi}{4}$, 즉 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$로 잡는다. 확인해 보면 $\mathrm{f}(0) = 1$이고, $u = \frac{\pi x}{4}$, $v = \frac{\pi y}{4}$라 하면

$$\mathrm{f}(-2 - x) = \cos(-\tfrac{\pi}{2} - u) = \cos(\tfrac{\pi}{2} + u) = -\sin u, \qquad \mathrm{f}(-2 + y) = \cos(v - \tfrac{\pi}{2}) = \sin v,$$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(-2 - x)\mathrm{f}(-2 + y) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ &= \cos(u - v) = \cos\tfrac{\pi(x-y)}{4} = \mathrm{f}(x - y).\end{aligned}$$

두 함수 모두 분명히 상수함수가 아니다. (더 일반적으로, $\cos ka = 0$인 임의의 a에 대해 $\cos kx$가 성립하므로, $a = -2$일 때 $\cos\frac{3\pi x}{4}$도 답이 된다.)

검산

소문항 (iii)에 $t = 0$을 대입하면 $\mathrm{f}(2a) = -\mathrm{f}(0) = -1$이 되어 (ii)와 일치하고, (iii)에 $t = a$를 대입하면 $\mathrm{f}(a) = -\mathrm{f}(a)$가 되어 $\mathrm{f}(a) = 0$과 일치한다. 수치로 확인하면, $a = -2$이고 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$일 때 $x = 1, y = 3$에서 좌변은 $\mathrm{f}(-2) = 0$이고 우변은 $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(-3)\mathrm{f}(1) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0$이다. 컴퓨터로 두 예를 무작위 순서쌍 (x, y) 20 000개에서 시험한 결과, 항등식이 10^{-13} 이내의 오차로 성립하였다.

흔한 실수

- 반주기 이동의 부호를 잘못 잡는 것: (iii)과 (i)에서 $\mathrm{f}(t + 2a) = -\mathrm{f}(t)$가 나오므로, 주기는 $2a$가 아니라 $4a$이다.
- (i)–(iv)를 증명할 때 f가 미분가능하다고(또는 코사인이라고) 가정하는 것. 문제에서 이를 금지하므로, 대입만 허용된다.
- $a = -2$일 때 $\cos\frac{\pi x}{4}$가 항등식을 만족하는지 확인하지 않고 제시하는 것: $\mathrm{f}(a) = 0$과 주기를 맞추는 것은 좋은 길잡이일 뿐 증명이 아니다.

STEP 너머

함수가 만족하는 항등식으로부터 그 함수를 결정하는 것이 **함수방정식**(*functional equations*)의 주제이다. 여기서는 항등식 하나만으로 우함수 성질, "반주기" 부호 변화, 주기성이 모두 따라 나온다. 해석학(analysis) 강의에서는 고전적인 결과들을 만나게 된다. 코시(Cauchy)의 방정식 $\mathrm{f}(x+y) = \mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y)$는 연속성을 추가하면 $\mathrm{f}(x) = cx$를 강제하고, 그런 조건이 없으면 기이한 해들이 존재한다. 마찬가지로 코사인의 뺄셈 공식은 연속함수 가운데에서 $\cos kx$를 특징짓는다. 이런 논증에 연속성이 어떻게 개입하는지에 대한 엄밀한 설명은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.