풀이

STEP II 1994, 문제 2

순수수학 • 르장드르 다항식

> **STEP II 1994, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q2

핵심 아이디어

인수 $(x-a)^m$은 미분할 때마다 조금씩 약해지기는 하지만 살아남는다. 따라서 m중근(repeated root of order m)은 처음 $m-1$개의 도함수(derivative)의 근이기도 하다. 다항식(polynomial) $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$은 구간 $[-1,1]$의 양 끝점에서 n중근을 가지므로, $x^m\mathrm{P}_n(x)$를 부분적분(integration by parts)하면 경계항(boundary term)이 모두 사라진다. 부분적분을 한 번 할 때마다 미분 하나가 $(x^2-1)^n$에서 x^m으로 옮겨 가며, $(x^2-1)^n$보다 x^m이 먼저 미분할 여지를 다 써 버린다.

풀이

중근과 도함수

곱의 미분법(product rule)에 의해

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(x) &= m(x-a)^{m-1}\mathrm{Q}(x) + (x-a)^m\mathrm{Q}'(x)\\ &= (x-a)^{m-1}[m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)] = (x-a)^{m-1}\mathrm{R}(x),\end{aligned}$$

이다. 여기서 다항식의 합과 곱은 다항식이므로 $\mathrm{R}(x) = m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)$는 다항식이다. 이것이 구하는 꼴이다.

이 결과는 $k \geq 1$일 때 인수 $(x-a)^k$를 갖는 다항식의 도함수가 인수 $(x-a)^{k-1}$을 갖는다는 뜻이다. $k = m$에서 시작하여 이를 반복해서 적용하면, 어떤 다항식 R_r에 대하여

$$\mathrm{P}^{(r)}(x) = (x-a)^{m-r}\mathrm{R}_r(x) \qquad (0 \leq r \leq m)$$

를 얻는다. $\mathrm{P}^{(r+1)}$을 얻기 위해 $\mathrm{P}^{(r)}$을 미분하는 것은 $r \leq m-1$일 때뿐이고, 이때 지수 $m-r$은 1 이상이므로 각 단계는 정당하다. $1 \leq r \leq m-1$이면 $m-r \geq 1$이므로 $(x-a)$는

여전히 $\mathrm{P}^{(r)}(x)$의 인수이고, 따라서 $\mathrm{P}^{(r)}(a) = 0$이다. (이는 $r = 0$일 때도 성립하지만, $r = m$일 때는 일반적으로 성립하지 않는다.)

P_n은 n차 다항식이다

$\mathrm{F}(x) = (x^2-1)^n$이라 하자. 이항정리(binomial theorem)에 의해 $\mathrm{F}(x)$는 x^{2n}에 차수가 $2n-2$ 이하인 항들을 더한 것이다. x^k를 n번 미분하면 ($k < n$일 때) 0이 되거나 x^{k-n}의 상수배가 되므로, $\mathrm{P}_n = \mathrm{F}^{(n)}$은 차수가 n 이하인 다항식이다. 그 x^n항은 오직 x^{2n}에서만 나온다.

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^{2n} = 2n(2n-1)\cdots(n+1)\,x^n = \frac{(2n)!}{n!}\,x^n.$$

이 계수는 0이 아니므로 P_n의 차수는 정확히 n이다.

0이 되는 적분

$\mathrm{F}(x) = (x-1)^n(x+1)^n$이므로, 첫 번째 결과에 $a = 1, m = n, \mathrm{Q}(x) = (x+1)^n$을 적용하면 $1 \le r \le n-1$에 대하여 $\mathrm{F}^{(r)}(1) = 0$이다. $a = -1$로 같은 논증을 하면 $\mathrm{F}^{(r)}(-1) = 0$을 얻는다. 또한 $\mathrm{F}(\pm 1) = 0$임은 바로 알 수 있다. 따라서

$$\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0 \qquad \text{단, } 0 \le r \le n-1. \tag{$*$}$$

이제 $j \ge 1, 1 \le k \le n$이라 하자. x^j를 미분하고 $\mathrm{F}^{(k)}$를 적분하는 방식으로 부분적분하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^j \mathrm{F}^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^j \mathrm{F}^{(k-1)}(x)\right]_{-1}^{1} - j\int_{-1}^{1} x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -j\int_{-1}^{1} x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

이다. $k-1 \le n-1$이므로 $(*)$에 의해 경계항이 사라지기 때문이다.

? 생각해 보기 이 과정을 몇 번까지 써도 문제가 생기지 않을까?

한 번 쓸 때마다 x의 지수가 하나 줄고 도함수의 계수도 하나 준다. x^m과 $\mathrm{F}^{(n)}$에서 시작하므로 m번 적용할 수 있다. 이 단계에는 $k \ge 1$이 필요한데, 사용하는 가장 작은 k는 $n-m+1 \ge 1$이다. m번 적용하고 나면

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \mathrm{F}^{(n-m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

이다. ($m = 0$이면 이것은 원래 적분 그대로이다.)

$0 \le m \le n-1$이면 $n-m \ge 1$이므로 마지막 피적분함수는 그 자체로 도함수이고, $0 \le n-m-1 \le n-1$이므로 $(*)$에 의해

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m!\left[\mathrm{F}^{(n-m-1)}(x)\right]_{-1}^{1} = 0,$$

이다. 이것이 구하는 결과이다.

$m = n$인 경우

$m = n$일 때도 같은 환원 과정이 여전히 유효하며(마지막 단계에서 $k = 1$을 쓴다),

$$\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = n! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x,$$

를 얻는다. $(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$이기 때문이다. 피적분함수는 우함수(even function)이고, 치환(substitution) $x = \sin t$, $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$는 $[0,1]$을 $[0, \frac{\pi}{2}]$로 보내며 $1 - x^2 = \cos^2 t$이다. 따라서 힌트에 주어진 공식을 쓰면

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

이다. 그러므로

$$\boxed{\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^3}{(2n+1)!}.}$$

검산

$n = 1$이면 $\mathrm{P}_1(x) = 2x$이므로 $\int_{-1}^{1} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$이고, 공식은 $\frac{8\cdot 1}{6} = \frac{4}{3}$을 준다. $n = 2$이면 $\mathrm{P}_2(x) = 12x^2 - 4$이다. 이때 $\int_{-1}^{1}(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 8 - 8 = 0$이고 $\int_{-1}^{1} x(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 0$(피적분함수가 기함수)이므로 예측과 일치한다. 또한 $\int_{-1}^{1} x^2(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{24}{5} - \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$이고, 이는 $\frac{2^5\cdot 8}{120} = \frac{32}{15}$와 일치한다. $n \le 10$에 대해서는 이 모든 것을 컴퓨터로 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- 경계항이 사라지려면 $1 \le r \le n-1$뿐 아니라 $r = 0$일 때도 $\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0$이어야 한다는 것을 잊는 것. $m = n-1$일 때 마지막 단계에서 $r = 0$을 쓴다.
- 부호를 놓치는 것: $(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$이 부분적분에서 생긴 $(-1)^n$을 상쇄하므로 답은 양수이다. $x^n \mathrm{P}_n(x)$의 최고차항 계수가 양수이므로 이는 타당하다.

STEP 너머

상수배를 제외하면 P_n은 n차 르장드르 다항식(Legendre polynomial)이고, 이를 나타내는 이 공식은 로드리게스 공식(Rodrigues' formula)이다. 첫 번째 결과는 내적(inner product) $\int_{-1}^{1} fg\,\mathrm{d}x$에 대하여 P_n이 더 낮은 차수의 모든 다항식과 직교(orthogonal)한다는 뜻이다. 이것이 르장드르 급수(Legendre series)와 가우스 구적법(Gaussian quadrature)의 바탕이 되는 성질이다. 르장드르 다항식은 구면좌표(spherical coordinates)에서 라플라스 방

정식(Laplace's equation)을 풀 때도 등장한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(미분방정식 입문서)는 르장드르 미분방정식을 통해 이 다항식들을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.