풀이

STEP II 1994, 문제 11

역학 • 포물체와 폭발

> **STEP II 1994, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q11

핵심 아이디어

폭발은 알려진 높이, 즉 연직 비행의 꼭대기에서 일어나고, 그 순간 포탄(shell)은 정지해 있다. 따라서 두 파편(fragment)은 같은 점에서 크기가 같고 방향이 반대인 속도로 출발한다. 방향을 하나의 각 θ로 나타내면 각 착지 시간은 이차방정식(quadratic equation)에서 나오고, 두 착지점 사이의 간격은 θ에 대한 하나의 함수가 된다. 두 경우가 생기는 까닭은 그 함수의 최댓값이 허용 범위의 끝점에 있거나 내부의 극점(turning point)에 있기 때문이다.

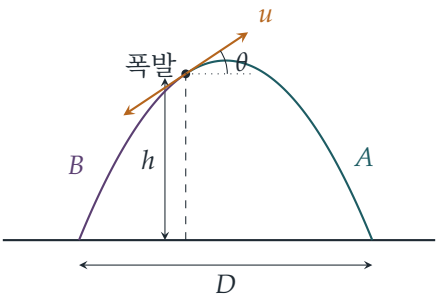
풀이

설정

포탄과 파편을 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 모형화한다. 포탄은 처음 속력 v로 올라가므로 다음 높이에서 정지한다.

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{즉,} \qquad 2gh = v^2.$$

폭발 직후의 파편을 A와 B라 하자. 두 파편의 속도는 크기가 같고 방향이 반대이므로, 둘 다 폭발점을 지나는 하나의 연직 평면 위에 있다. 그 평면에서 x축을 수평으로, y축을 연직 위쪽으로 잡고, 폭발점을 $(0, h)$에 둔다. A가 아래쪽으로 움직이지 않도록 파편에 이름을 붙일 수 있다. 그러면 A의 속도는 $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$, B의 속도는 $(-u\cos\theta,\ -u\sin\theta)$이고, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$이다. $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$로 쓰면 $c \ge 0$이다.



착지 시간

폭발 후 시각 t에서 파편 A의 높이는 $h + ust - \frac{1}{2}gt^2$이다. A는 다음 식이 성립할 때 착지한다.

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - us\,t - h = 0.$$

두 근의 곱은 $-2h/g < 0$이므로 양의 근은 정확히 하나이다.

$$t_A = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + 2gh}}{g} = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

B의 연직 속도는 $-us$이므로 s를 $-s$로 바꾸면 된다.

$$t_B = \frac{-us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$\sqrt{u^2s^2 + v^2} > us$이므로 이 값은 양수이다.

착지점 사이의 거리

수평 방향으로 A는 x축의 양의 방향으로 $uc\,t_A$만큼, B는 음의 방향으로 $uc\,t_B$만큼 이동하므로, 두 파편은 출발점의 서로 반대편에 착지한다. 따라서 착지점 사이의 거리는 다음과 같다.

$$D = uc\,(t_A + t_B) = \frac{2uc\sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$D \geq 0$이므로 D를 최대화하는 것은 D^2을 최대화하는 것과 같다. $x = s^2 \in [0,1]$로 두면 $c^2 = 1 - x$이다. 그러면

$$\frac{g^2D^2}{4u^2} = (1-x)(v^2 + u^2x) = f(x), \qquad \text{라 두자,}$$

이고

$$f(x) = v^2 + (u^2 - v^2)x - u^2x^2.$$

이것은 최고차항의 계수가 음수인 x에 대한 이차식이고, 꼭짓점(vertex)은 다음 위치에 있다.

$$x^* = \frac{u^2 - v^2}{2u^2}.$$

생각해 보기 f의 꼭짓점은 최댓값인데, 왜 답이 항상 $f(x^*)$가 아닐까?

$x = \sin^2\theta$이므로 $x \in [0,1]$만 허용된다. 항상 $x^* < \frac{1}{2}$임에 주목하자. 따라서 꼭짓점이 위쪽 끝을 넘어서는 일은 없다. 꼭짓점이 허용되는지는 오직 그 부호에 달려 있다.

$u \le v$인 경우. 이때 $x^* \le 0$이다. $[0,1]$에서는 아래로 볼록한 포물선의 꼭짓점 오른쪽에 있으므로 f는 감소하고, 최댓값은 $x = 0$에서 $f(0) = v^2$이다. 이는 $\theta = 0$, 즉 수평 방향의 폭발에 해당한다. 따라서

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\sqrt{v^2} = \frac{2uv}{g}.$$

$v \le u$인 경우. 이때 $0 \le x^* < \frac{1}{2}$이므로 꼭짓점이 허용되고, 거기서 최댓값을 얻는다.

$$f(x^*) = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{2u^2} - \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2}$$
$$= \frac{4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4u^2} = \frac{(u^2+v^2)^2}{4u^2}.$$

그러므로

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\cdot\frac{u^2+v^2}{2u} = \frac{u^2+v^2}{g}.$$

이는 $\sin^2\theta = \dfrac{u^2-v^2}{2u^2}$일 때, 즉 파편이 수평과 어떤 각을 이루며 날아갈 때 일어난다.

$u = v$이면 두 공식 모두 $2u^2/g$를 주므로, 두 답은 경우의 경계에서 마땅히 그래야 하듯 일치한다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 단위: uv/g와 $(u^2+v^2)/g$는 모두 (속력)^2/(가속도)이고, 이는 길이이다.
- $g = 9.8$, $u = 30$, $v = 10$으로 두면 최적의 각은 $\theta \approx 41.8^\circ$이고, D의 일반 공식과 $(u^2+v^2)/g$ 모두에서 $D = 1000/9.8 \approx 102.04\,\text{m}$를 얻는다. 수평 방향의 폭발은 $2\cdot 30\cdot 10/9.8 \approx 61.2\,\text{m}$만 준다.
- 두 궤적을 수치적으로 한 단계씩 계산하고 θ를 촘촘한 격자에서 훑어 보면, 수백 개의 무작위 쌍 (u,v)에 대해 두 최댓값이 모두 재현된다.
- $v = 0$이면 포탄은 지면에서 폭발하고, 답은 u^2/g가 된다. 이는 속력 u, 각 45°로 쏜 발사체의 잘 알려진 최대 사거리로, 마땅히 그래야 한다. B는 곧바로 땅속으로 들어가고, $x^* = \frac{1}{2}$는 $\theta = 45^\circ$를 준다.

흔한 실수

- 최적의 폭발이 수평 방향이라고 가정하는 것. 이는 $u \leq v$일 때만 참이다.
- 두 파편에 같은 비행 시간을 쓰는 것. 위쪽으로 던져진 파편이 공중에 더 오래 머문다.
- 최대화할 때 제약 조건 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$을 잊어서 경우 나누기를 놓치는 것.

STEP 너머

이 깔끔한 답에는 멋진 설명이 있다. 그저 똑바로 아래로 떨어지는 질량중심(centre of mass)에 대해 보면, 두 파편은 상대 속력 $2u$로 일직선을 따라 멀어진다. 하지만 두 파편은 서로 다른 시각에 지면에 닿으므로, 이 문제는 제약 조건 아래의 최적화 문제가 되고, 매개변수가 변함에 따라 최댓값의 위치가 경계에서 내부로 바뀐다. 이런 전환은 대학 1학년 최적화에서 배우는 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multiplier)와 카루시–쿤–터커(Karush–Kuhn–Tucker) 조건에서 다시 나타난다. 운동량 보존(conservation of momentum), 질량중심 좌표계, 발사체 문제를 더 깊이 다룬 내용은 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.