풀이

STEP II 1994, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 단진동

> **STEP II 1994, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q10

핵심 아이디어

트레일러의 위치 대신 밧줄의 **늘어난 길이**(extension)를 변수로 삼는다. 트럭의 속도가 일정하므로, 늘어난 길이는 부호만 다를 뿐 트레일러의 가속도와 똑같은 방정식을 따르고, 그 방정식은 단순조화운동(simple harmonic motion)의 방정식이다. 따라서 밧줄은 반 주기 동안 팽팽(taut)하게 유지되다가, 트럭보다 빠르게 움직이는 트레일러를 놓아 준다. 그 다음은 등속도로 따라잡는 평범한 문제이다.

풀이

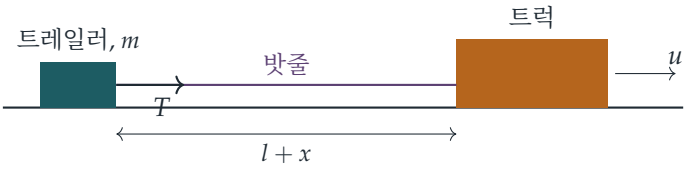
설정

트레일러를 질점(particle)으로, 밧줄은 가볍고 팽팽할 때는 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르며 느슨할 때는 힘을 작용하지 않는 것으로 모형화하고, 마찰은 무시한다. 시간 t는 밧줄이 처음 팽팽해지는 순간부터 재고, 거리는 운동 방향을 따라 잰다. $t = 0$일 때 트럭은 속력 u로 움직이고 있고(그 속력을 계속 유지한다), 트레일러는 정지해 있으며, 트럭은 트레일러보다 거리 l만큼 앞에 있다.

트레일러의 위치를 $y(t)$라 하고 $y(0) = 0$이라 하면, 트럭의 위치는 $l + ut$이다. 밧줄의 늘어난 길이는

$$x = (l + ut) - y - l = ut - y.$$

이다.



밧줄이 팽팽한 동안

$x > 0$인 동안 장력(tension)은 $T = \lambda x/l$이고, 이것이 트레일러에 작용하는 유일한 수평 방향의 힘으로서 트레일러를 앞으로 끌어당긴다. 따라서

$$m\ddot{y} = \frac{\lambda x}{l}.$$

이다. $x = ut - y$이고 u가 상수이므로 $\ddot{x} = -\ddot{y}$이고, 따라서

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \text{여기서} \omega^2 = \frac{\lambda}{ml}.$$

이다. 이것은 단순조화운동이다. 초기 조건은 $x(0) = 0$(밧줄이 막 팽팽해졌다)과 $\dot{x}(0) = u - \dot{y}(0) = u$이므로

$$x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t, \qquad \dot{x} = u\cos\omega t.$$

이다. 트레일러의 속도는 $\dot{y} = u - \dot{x} = u(1 - \cos\omega t)$이다.

생각해 보기 단순조화운동의 공식에 따르면 얼마 후 x가 음수가 된다. 그때에도 이 공식이 여전히 성립하는가?

그렇지 않다. 방정식 $\ddot{x} = -\omega^2 x$는 장력 $\lambda x/l$을 사용했는데, 이는 $x > 0$일 때만 적용된다. 밧줄은 밀 수 없기 때문이다. 이 공식은 $\sin\omega t \geq 0$인 $0 \leq t \leq \pi/\omega$에서 성립하며, 밧줄은

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

에서 다시 느슨해진다. 그 순간 늘어난 길이는 0이므로 트레일러는 다시 트럭보다 거리 l만큼 뒤에 있고, 그 속도는

$$\dot{y}(t_1) = u(1 - \cos\pi) = 2u.$$

이다.

밧줄이 느슨해진 후

$t > t_1$에서 트레일러는 $2u$로, 트럭은 u로 움직이므로, $t = t_1$에서 l이던 둘 사이의 간격은 일정한 비율 $2u - u = u$로 줄어든다. 그러면 간격이 l보다 작으므로 밧줄은 계속 느슨한 상태로 있고, 트레일러에는 여전히 수평 방향의 힘이 작용하지 않으므로 그 속력은 실제로 $2u$로 유지된다. 간격은 추가로 시간 l/u가 지난 후 0이 된다.

따라서 트레일러는 밧줄이 처음 팽팽해진 후

$$t_1 + \frac{l}{u} = \pi \left(\frac{lm}{\lambda} \right)^{1/2} + \frac{l}{u}$$

의 시간이 지나서 트럭과 충돌하며, 이로써 요구된 결과가 증명된다.

검산

- 단위: λ는 힘이므로 lm/λ의 단위는 $\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}/\mathrm{N} = \mathrm{s}^2$이고, 두 항 모두 시간이다.
- 기준틀(frame)의 변환: 밧줄은 트레일러와 사실상 질량이 무한대인 트럭 사이의 탄성 충돌(elastic collision)에서 용수철처럼 행동한다. 트럭의 기준틀에서 트레일러는 u로 다가와서 반대 방향으로 u로 멀어지므로, 결국 지면에 대한 속력은 $2u$가 되어 앞에서 구한 결과와 같다.
- 트레일러의 운동 방정식을 (밧줄이 느슨할 때마다 힘을 끄는 방식으로) m, l, λ, u의 임의의 값에 대해 수치 적분한 결과가 공식과 일치했다. 예를 들어 $\pi/\omega \approx 2.9944$이고 $l/u \approx 2.3017$이 되도록 m, l, λ, u를 고르면, 예측값 5.2961에 대해 충돌 시간 5.2962를 얻었다.

흔한 실수

- 늘어난 길이가 0으로 돌아오면 밧줄이 느슨해진다는 것을 잊고, 단순조화운동의 해를 모든 시간에 대해 적용하는 실수.
- 트레일러의 위치 y에 대한 운동 방정식을 직접 세워서 강제 진동 방정식인 $m\ddot{y} = \lambda(ut - y)/l$을 얻는 경우. 이 방정식도 풀 수는 있지만, 치환 $x = ut - y$를 하면 곧바로 강제항이 없는 방정식이 된다.
- 마지막 l/u를 빠뜨리는 실수: 밧줄이 느슨해질 때 트레일러는 여전히 트럭보다 고유 길이(natural length) 전체만큼 뒤에 있다.

STEP 너머

트럭의 기준틀로 바꾸면 전체 과정은 트레일러와 움직이지 않는 벽에 붙은 용수철 사이의 탄성 "충돌"이 된다. 트레일러는 속력 u로 들어와서 속력 u로 나가며, 접촉은 속력과 관계없이 정확히 반 주기 동안 지속된다. 이것은 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)과 에너지 보존(energy conservation)이 충돌을 어떻게 제약하는지 보여 주는 가장 간단한 예로, 대학 1학년 역학 전반에 걸쳐 나타나며 산란 이론(scattering theory)으로 이어지는 아이디

어이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동과 충돌을 모두 이러한 관점에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.