풀이

STEP II 1994, 문제 1

순수수학 • 나누어떨어짐과 십진법 자릿수

> **STEP II 1994, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q1

핵심 아이디어

곱의 마지막 몇 자리는 인수들의 마지막 몇 자리에만 의존하므로, 여기서 다루는 것은 모두 10의 거듭제곱을 법(modulo)으로 하는 산술이다. 1, 3, 7 또는 9로 끝나는 수는 10과 공통인수를 갖지 않으며, 그 덕분에 10을 법으로, 사실은 10의 임의의 거듭제곱을 법으로 가역(*invertible*)이다. 가운데 부분에서는 n에서 인수 2와 5를 떼어 내어 이를 0들로 바꾼다. 마지막 부분에서는 10^{10}을 법으로 하는 가역성을 이용하여 곱의 마지막 열 자리가 우리가 원하는 어떤 숫자 묶음이든 되도록 만든다.

풀이

소문항 1: 1로 끝나는 배수

$n \times m$의 마지막 자리는 (n의 마지막 자리)$\times$(m의 마지막 자리)의 마지막 자리와 같다. 나머지 자리들은 10의 배수만큼만 기여하기 때문이다. n은 5나 짝수 숫자로 끝나지 않으므로 1, 3, 7 또는 9로 끝나며,

$$1 \times 1 = 1, \qquad 3 \times 7 = 21, \qquad 7 \times 3 = 21, \qquad 9 \times 9 = 81.$$

따라서 각각 $m = 1, 7, 3$ 또는 9로 잡으면 된다. 그러면 요구한 대로 $n \times m$은 1로 끝난다.

소문항 2: 임의의 n

$$n = 2^a\, 5^b\, k,$$

로 쓰자. 여기서 $a, b \geq 0$이고 k는 2로도 5로도 나누어떨어지지 않는다. 그러면 k는 5나 짝수 숫자로 끝나지 않으므로, 소문항 1에 의해 km'이 1로 끝나는 m'이 존재한다. 이제

$$m = 2^b 5^a m'.$$

이라 하자. 그러면

$$n \times m = 2^{a+b} 5^{a+b} km' = 10^{a+b} (km').$$

10^{a+b}을 곱하는 것은 km' 뒤에 0을 $a+b$개 덧붙이는 것일 뿐이다. 따라서 $n \times m$은 $a+b = 0$이면 1로 끝나고, 그렇지 않으면 1 뒤에 0이 $a+b$개 이어진 형태로 끝난다. 이것이 우리가 보여야 할 것이었다.

예를 들어 $n = 40 = 2^3 \cdot 5$이면 $k = 1$이므로 $m = 2 \cdot 5^3 = 250$이고 $n \times m = 10\,000$이다.

소문항 3: 열 개의 숫자 모두

$r \geq 0$이고 q가 1로 끝나도록 $n = 10^r q$로 쓰자. 0을 덧붙여도 기존의 숫자가 사라지지는 않으므로, $q \times m$이 모든 숫자를 포함하는 m을 찾으면 충분하다. 그러면 $n \times m = 10^r (qm)$도 모든 숫자를 포함한다.

$N = 10^{10}$이라 하고, 모든 숫자를 포함하는 $X = 1234567890$을 생각하자. 우리의 목표는

$$qm \equiv X \pmod{N},$$

즉 qm이 열 자리 숫자 1234567890으로 끝나게 하는 것이다.

> **생각해 보기** 왜 q의 어떤 배수는 반드시 10^{10}으로 나눈 나머지가 X가 되는가?

N개의 수 $q \times 0$, $q \times 1$, …, $q \times (N-1)$과 이들을 N으로 나눈 나머지를 생각하자. 두 나머지가 같다고, 즉 $0 \leq t < s \leq N-1$에 대하여 $qs \equiv qt \pmod{N}$이라고 가정하자. 그러면 10^{10}은 $q(s-t)$를 나눈다. 그런데 q는 1로 끝나므로 홀수이고 5의 배수도 아니어서, $10^{10} = 2^{10}5^{10}$과 공통인 소인수를 갖지 않는다. 따라서 $2^{10}5^{10}$이 $s-t$를 나누어야 하는데, $0 < s-t < N$이므로 이는 불가능하다. 그러므로 N개의 나머지는 모두 서로 다르다. 가능한 나머지는 $0, 1, \ldots, N-1$의 N개뿐이므로, 이들 각각이 모두 나타난다. 특히 $qm \equiv X \pmod{N}$을 만족하는 $0 \leq m \leq N-1$인 m이 존재한다.

$X \neq 0$이므로 이 m은 0이 아니다. 따라서 qm은 양의 배수이고 $qm \geq X \geq 10^9$이다. 그러므로 그 마지막 열 자리는 정확히 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0이며, X의 맨 앞자리 1도 실제로 나타난다. 따라서 $q \times m$은, 그리고 $n \times m$도, 숫자 $0, 1, \ldots, 9$를 모두 포함한다.

예를 들어 $n = 21$이면 $m = 7\,201\,646\,090$으로 잡을 수 있고, 이 때 $21 \times m = 151\,234\,567\,890$이다.

> **생각해 보기** n에 대한 가정은 어디에서 쓰였고, 왜 필요했는가?

이 가정은 q가 인수 2나 5를 갖지 않는다는 것을 알기 위해서만 쓰였다. 그 가정이 없으면 나머지 $qm \bmod 10^{10}$이 모든 값을 가질 수는 없다. 예를 들어 2의 배수는 모두 짝수이므로 $\ldots 1$로 끝날 수 없다. 곱의 끝부분을 우리 마음대로 정할 수 있게 해 주는 것이 바로 이 가정이다. (소문항 2는 모든 n이 이런 꼴의 배수를 가짐을 보여 주므로, 소문항 3과 합치면 모든 n이 열 개의 숫자를 모두 포함하는 배수를 갖는다.)

검산

- 소문항 1을 손으로 확인하면: $13 \times 7 = 91$이고 $29 \times 9 = 261$이다.
- 컴퓨터로 확인한 결과, 5나 짝수 숫자로 끝나지 않는 모든 $n \leq 20\,000$에 대하여 소문항 1의 방법이 성립하였다. 소문항 2의 구성은 모든 $n \leq 20\,000$과 10^{15} 이하의 임의의 n 20 000개에 대하여 성립하였다. 또한 요구된 꼴의 n 값 10 000개 이상(여러 개의 0으로 끝나는 것들도 포함)에 대하여 소문항 3의 곱하는 수를 계산하였고, 모든 경우에 $n \times m$은 열 개의 숫자를 모두 포함하였다. 예: $21 \times 7\,201\,646\,090 = 151\,234\,567\,890$, $11 \times 4\,657\,687\,990 = 51\,234\,567\,890$.

흔한 실수

- 소문항 3에서 숫자 묶음 1234567890이 정말로 온전히 나타나는지 확인하는 것을 잊는 경우. 맨 앞자리 1이 나타나려면 $qm \geq 10^9$이어야 하는데, $qm \equiv X$이고 $qm > 0$이므로 이는 성립한다.
- 소문항 2에서 $2^b 5^a$ 대신 10^{a+b}을 곱하는 경우. 그러면 0은 덧붙지만, n에 이미 들어 있는 2와 5들은 그대로 남는다.

STEP 너머

소문항 3의 비둘기집 원리(pigeonhole principle) 논증은 일반적인 사실을 증명한다. 즉 $\gcd(q, N) = 1$이면 q는 N을 법으로 곱셈에 대한 역원(multiplicative inverse)을 갖는다. 가역인 잉여(residue)들은 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$로 쓰는 군(group)을 이루며, 이는 초등 정수론(number theory)과 RSA 암호(cryptography)의 출발점이다. 다른 기법을 쓰면 마지막 부분이 어떤 n에 대해서도 성립함을 보일 수 있다. $10^k \geq n$이면 n의 어떤 배수는 $X \cdot 10^k$과 $X \cdot 10^k + 10^k$ 사이에 놓이고, 그런 배수는 1234567890으로 시작한다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동(congruence)과 잉여에 대한 훌륭한 입문서이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.