풀이

STEP I 1994, 문제 9

역학 • 포물체 운동

STEP I 1994, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s1-q9

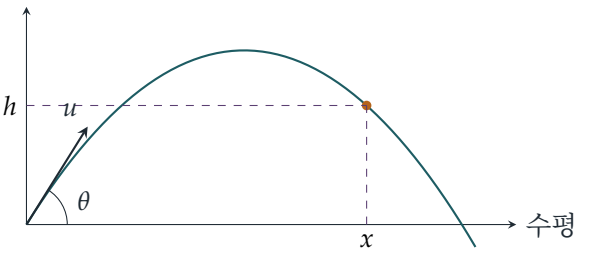
핵심 아이디어

발사각 θ는 우리가 모르는 값이므로 소거한다. 수평 방향과 연직 방향의 식에는 각각 $u\cos\theta$와 $u\sin\theta$가 들어 있으므로, 두 식을 제곱하여 더하면 θ가 완전히 사라진다. 그 결과로 얻는 식은 t^2에 대한 이차방정식(quadratic)이며, 이차방정식은 판별식(discriminant)이 음이 아닐 때에만 실근을 가진다. 바로 이 조건이 사정거리(range)에 대한 한계가 된다.

풀이

t에 대한 방정식

포탄을 중력만 받으며 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 원점에서 수평면 위로 각 θ만큼 기울여 발사한다고 하자. 시각 t에서 포탄은 수평 거리 x, 높이 h인 곳에 있으므로, 대포로부터의 거리는 요구한 대로 $\sqrt{x^2+h^2}$이다.



아래 방향으로 일정한 가속도 g가 작용하고 수평 방향의 힘은 없으므로

$$x = ut\cos\theta,$$
$$h = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

θ가 들어 있는 항만 한쪽으로 모으면

$$ut\cos\theta = x, \qquad ut\sin\theta = h + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

두 식을 제곱하여 더하고 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$을 이용하면

$$\begin{aligned} u^2t^2 &= x^2 + (h + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 \\ &= x^2 + h^2 + ght^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4, \end{aligned}$$

이고, 이를 정리하면 요구한 대로

$$\tfrac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - gh)t^2 + h^2 + x^2 = 0,$$

을 얻는다.

사정거리의 한계

이제 u와 h를 고정하고, 높이 h에서 가능한 수평 거리 x가 어떤 값인지 알아보자. 어떤 시각 t에 포탄이 (x, h)에 있다면, $T = t^2$은

$$\tfrac{1}{4}g^2T^2 - (u^2 - gh)T + (h^2 + x^2) = 0.$$

의 실근이다.

> **생각해 보기** 이 방정식에는 x, h, u, t가 들어 있지만, 우리가 원하는 것은 x만에 대한 명제이다. 이차방정식이 실근을 가지려면 무엇이 성립해야 하는가?

실근을 가지려면 판별식이 음이 아니어야 한다.

$$\begin{aligned} (u^2 - gh)^2 - 4\cdot\tfrac{1}{4}g^2(h^2 + x^2) &\geq 0 \\ u^4 - 2u^2gh + g^2h^2 - g^2h^2 - g^2x^2 &\geq 0 \\ g^2x^2 &\leq u^2(u^2 - 2gh). \end{aligned}$$

$u^2 > 2gh$이므로 우변은 양수이고, 음이 아닌 제곱근을 취하면

$$x \leq \frac{u\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

따라서 높이 h에서의 수평 사정거리는 이 값을 결코 넘을 수 없으며, 이것이 보여야 할 내용이었다. ($u^2 < 2gh$이면 어떤 x에 대해서도 이 부등식이 성립할 수 없다. 높이 h가 포탄이 도달할 수 있는 최고 높이 $u^2/2g$보다 높기 때문이다.)

한계에 실제로 도달한다

등호가 성립한다는 것은 판별식이 0이라는 뜻이므로, 중근(double root)

$$t^2 = T = \frac{u^2 - gh}{2 \cdot \frac{1}{4}g^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2}.$$

을 가진다. 이 값은 양수이므로($h \geq 0$이면 $u^2 > 2gh \geq gh$이기 때문이고, $h < 0$이면 자명하다) 실제 시각 $t > 0$을 준다. 아직 어떤 각 θ가 $x = u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$와 함께 이 시각을 만들어 내는지 확인해야 한다. 두 성분 방정식으로부터 다음이 필요하다.

$$\sin\theta = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{ut}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{ut}.$$

위의 t^2 값을 대입하면 $h + \frac{1}{2}gt^2 = h + (u^2 - gh)/g = u^2/g$이므로

$$\sin\theta = \frac{u}{gt}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{gt}.$$

> **생각해 보기** $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 값을 따로따로 정했다. 두 값을 동시에 가지는 하나의 각이 존재한다는 것을 어떻게 알 수 있는가?

두 값은 모두 양수이고, t^2의 값에 의해

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{u^2 + u^2 - 2gh}{g^2t^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2t^2} = 1$$

이다. 따라서 0과 $\frac{1}{2}\pi$ 사이에 조건을 만족하는 각 θ가 정확히 하나 존재하며, 그 각은

$$\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}.$$

로 주어진다. 이 각으로 발사하면 포탄은 시각 t에 높이 h에 있고 수평 거리는 정확히 $u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$이므로, $u^2 > 2gh$일 때 한계에는 항상 도달한다.

$h > 0$일 때 $\tan\theta > 1$임에 주목하자. 즉 대포보다 높은 주어진 높이에서 가장 멀리 도달하려면 45°보다 가파르게 발사해야 한다. 또 그 순간의 연직 속도는 $u\sin\theta - gt = (u^2 - g^2t^2)/(gt) = (2gh - u^2)/(gt) < 0$이므로, 포탄은 내려오는 도중에 높이 h에서의 가장 먼 지점에 도달한다.

검산

- $h = 0$이면 한계는 u^2/g이고 $\tan\theta = 1$이다. 이는 평지에서 45°로 쏠 때의 익숙한 최대 사정거리이다.

- $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $h = 10\,\mathrm{m}$이면 한계는 약 $29.15\,\mathrm{m}$이고, 이때 $\theta \approx 54.5°$이다.
- 무작위로 잡은 궤적에서 사차방정식(quartic)이 성립함을 수치적으로 확인하였고, 수천 개의 발사각을 조사해도 한계를 넘는 경우는 없지만 10^{-4} 이내로 가까워짐을 확인하였다. 위에서 구한 각은 한계에 정확히 도달한다.

흔한 실수

- x를 θ에 대해 미분하여 가장 좋은 θ를 찾으려는 것. 그렇게 할 수도 있지만 계산이 지저분하다. 판별식이 최적화를 대신 해 준다.
- 마지막 단계를 빠뜨리는 것. 판별식이 0이면 t의 값을 얻지만, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$을 확인하여 실제로 그 값을 만드는 각이 존재함을 여전히 보여야 한다.

STEP 너머

속력 u로 발사한 포탄이 도달할 수 있는 점들은 모든 궤적의 **포락선**(envelope)으로 둘러싸인 영역을 채운다. 이 포락선이 바로 "안전 포물선"(parabola of safety) $y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$이다. 여기서 구한 한계를 정리하면, (x, h)에 도달할 수 있는 것은 그 점이 이 포물선 위 또는 아래에 있을 때와 정확히 같다는 것을 알 수 있다. 곡선족의 포락선은 같은 "중근" 아이디어에서 나오며, 변분법(calculus of variations)과 광학(optics)의 커스틱(caustics)에서도 다시 등장한다. 포물체 운동과 그 바탕의 역학에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.