풀이

STEP I 1994, 문제 8

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1994, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q8

핵심 아이디어

치환(substitution) $\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$는 구간(interval) $[0, \frac{1}{4}\pi]$를 자기 자신으로 뒤집어 옮기고, 덧셈정리(addition formula)는 $1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - \phi)$를 $2/(1 + \tan\phi)$로 바꾼다. 그러면 적분(integral)이 우변에 음의 부호를 달고 다시 나타나므로, 어려운 적분을 직접 계산하는 대신 그 적분에 대한 방정식을 풀면 된다. 뒤의 두 적분은 모양만 바꾼 같은 적분이다. 하나는 $x = \tan\theta$로 치환하면, 다른 하나는 반각 공식(half-angle formulae)을 쓰면 이 적분이 된다.

풀이

첫 번째 적분

이 적분을 I라 하자. $\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$로 놓으면 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$이고, $\theta = 0$일 때 $\phi = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$일 때 $\phi = 0$이다. 따라서

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,\mathrm{d}\phi.$$

$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$을 이용하여 덧셈정리를 쓰면

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi) = 1 + \frac{1 - \tan\phi}{1 + \tan\phi} = \frac{2}{1 + \tan\phi}.$$

($[0, \frac{1}{4}\pi]$에서 $\tan\phi \geq 0$이므로 분모가 0이 되는 일이 없고, 모든 로그(logarithm)의 진수는 양수이다.) 그러므로

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} (\ln 2 - \ln(1 + \tan\phi))\,\mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 - I,$$

이다. 마지막 적분은 적분변수(dummy variable)의 이름만 바꾼 I 자체이기 때문이다.

생각해 보기 원시함수를 한 번도 구하지 않았다. 왜 이렇게 해도 되는가?

원시함수(antiderivative)는 필요 없다. I는 하나의 수일 뿐이고, 치환을 통해 그 수가 만족해야 하는 방정식 $I = \frac{1}{4}\pi \ln 2 - I$를 얻었다. 이를 풀면

$$2I = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2,$$

이므로 증명하려던 결과를 얻는다.

$1+x^2$이 들어 있는 적분

인수 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$을 보면 $x = \tan\theta$로 치환할 생각이 든다. 그러면 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (1+x^2)\,\mathrm{d}\theta$이다. 적분 구간의 끝 $x=0$과 $x=1$은 각각 $\theta = 0$과 $\theta = \frac{1}{4}\pi$가 된다. 따라서

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2.$$

$\sin x$와 $\cos x$가 들어 있는 적분

이 적분을 J라 하자. 가장 빠른 길은 대칭(symmetry)을 이용하는 것이다. $x = \frac{1}{2}\pi - u$로 치환하면 sin과 cos이 서로 바뀌고 $[0, \frac{1}{2}\pi]$는 자기 자신으로 옮겨지므로

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\cos u}{1+\sin u}\right)\mathrm{d}u = -J,$$

이고, 따라서 $J = 0$이다. (같은 말이지만, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\sin x)\,\mathrm{d}x$와 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$가 같으므로 그 차는 0이다.)

생각해 보기 첫 번째 결과는 어디에 쓰이는가?

J가 I와 어떻게 연결되는지 살펴볼 만하다. 아마 문제에서 이 적분을 여기에 둔 이유도 그 때문일 것이다. $t = \frac{1}{2}x$로 놓으면 반각 공식에 의해

$$1+\cos x = 2\cos^2 t, \qquad 1+\sin x = (\cos t + \sin t)^2,$$

이므로

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{(\cos t+\sin t)^2}{2\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}(1+\tan t)^2.$$

x가 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 위를 움직이면 t는 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 위를 움직이고, $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$이다. 따라서

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (2\ln(1+\tan t) - \ln 2)\,2\,\mathrm{d}t = 4I - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = 0,$$

이고, 이는 대칭을 이용한 논증과 일치한다. 그러므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

검산

심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 tan 적분과 $1+x^2$ 적분 모두 0.2721982613이 나와 $\frac{1}{8}\pi\ln 2 = 0.2721982613\ldots$과 일치한다. 세 번째 적분은 기계 정밀도 범위에서 0이 나온다. 손으로 대략 확인해 볼 수도 있다. 피적분함수(integrand) $\ln(1+\tan\theta)$는 0에서 $\ln 2$까지 증가하므로 I는 대략 $\frac{1}{4}\pi\ln 2$의 절반쯤이어야 한다. 바로 그것이 답이다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$라는 것과 적분 구간의 끝이 서로 바뀐다는 것 중 하나를 잊는 실수. 두 번의 부호 변화는 서로 상쇄된다. 하나만 반영하면 $I = -\frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$가 되어 (양수인 적분의 값이 음수로 나온다).
- 덧셈정리의 분모를 잊고 $\tan(\frac{1}{4}\pi - \phi) = 1 - \tan\phi$로 쓰는 실수.
- $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 대칭을 알아차리지 못하고 세 번째 적분에 오랜 시간을 쓰는 실수.

STEP 너머

구간을 뒤집는 치환을 하고 그 결과를 원래 적분과 더하는 기법, 즉 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$를 이용하는 기법을 어떤 책에서는 킹 성질(King property)이라고 부른다. 이 기법으로 유명한 결과 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$도 얻을 수 있다. 대학에서는 이런 결과들이 매개변수가 있는 정적분(definite integrals with parameters)과 복소 경로적분(contour integration)의 이론 안에 자리 잡는데, 여기서는 원시함수를 구하지 않고도 적분들을 통째로 계산한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소 해석의 방법으로 이런 결과를 얻는 과정을 보여 주고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 대칭 기법을 연습할 수 있는 STEP 스타일의 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.