풀이

STEP I 1994, 문제 6

순수수학 • 복소함수의 합성

STEP I 1994, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s1-q6

핵심 아이디어

몫의 실수부(real part)와 허수부(imaginary part)를 구하려면 분자와 분모에 분모의 켤레복소수(conjugate)를 곱한다. x가 실수이므로 그 켤레복소수는 쉽게 적을 수 있다. 함수를 거듭 적용할 때에는 (i)에서 구한 복잡한 실수부와 허수부를 식에 한 번 더 넣는 것보다, 일반적인 z에 대하여 f를 자기 자신과 **대수적으로** 합성(compose)하는 편이 훨씬 깔끔하다. $\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))$를 깔끔한 꼴로 정리하고 나면 마지막 소문항은 한 줄짜리 대입으로 끝난다.

풀이

x가 실수이므로 $\mathrm{i}x+1$의 실수부는 1이다. 따라서 이 값은 결코 0이 아니고, $\mathrm{f}(x)$는 모든 실수 x에 대하여 정의된다.

소문항 (i)

x가 실수이므로 $\mathrm{i}x+1$의 켤레복소수는 $1-\mathrm{i}x$이다. 분자와 분모에 이것을 곱하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) = \frac{(\mathrm{i}x-1)(1-\mathrm{i}x)}{(1+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}x)} &= \frac{\mathrm{i}x+x^2-1+\mathrm{i}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2+1} + \mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

두 분수가 모두 실수이므로, 이것이 구하는 실수부와 허수부이다.

소문항 (ii)

임의의 복소수 w에 대하여 $ww^* = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2$이다. 소문항 (i)을 이용하면

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x)^* = \frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2} = 1.$$

따라서 $|\mathrm{f}(x)| = 1$이다. 즉 f는 모든 실수를 단위원(unit circle) 위의 점으로 보낸다.

소문항 (iii)

(i)의 답을 f에 대입하는 대신, 일반적인 z에 대하여 합성한다. $w = \mathrm{f}(z) = \dfrac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$로 놓고 $\mathrm{f}(w) = \dfrac{\mathrm{i}w-1}{\mathrm{i}w+1}$의 분자와 분모에 $\mathrm{i}z+1$을 곱하면

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)-(\mathrm{i}z+1)}{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)+(\mathrm{i}z+1)} = \frac{-z-\mathrm{i}-\mathrm{i}z-1}{-z-\mathrm{i}+\mathrm{i}z+1} \\ &= \frac{-(1+\mathrm{i})(z+1)}{(1-\mathrm{i})(1-z)} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$를 이용하였다.

? **생각해 보기** $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$는 모든 실수 x에 대하여 정의되는가?

그렇지 않다. $\mathrm{i}w+1 \neq 0$, 즉 $\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{i}$이어야 한다. 소문항 (i)에 따르면 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{i}$가 되려면 $x^2-1=0$이고 $2x = x^2+1$이어야 하는데, 이는 $x=1$일 때뿐이다. 이것은 위 식의 분모에 있는 인수 $x-1$과 맞아떨어진다. 따라서 $x \neq 1$인 실수 x에 대하여

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}\,\frac{x+1}{x-1}, \qquad \text{따라서} \qquad \operatorname{Re}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \frac{x+1}{x-1}.$$

f를 처음 적용하면 실수축이 단위원으로 옮겨지고, 두 번째로 적용하면 단위원이 허수축(imaginary axis)으로 옮겨진다.

소문항 (iv)

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$을 실수로 하여 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}y$로 쓰자. 그러면 $\mathrm{i}(\mathrm{i}y) = -y$이므로

$$\mathrm{f}(\mathrm{i}y) = \frac{-y-1}{-y+1} = \frac{y+1}{y-1}.$$

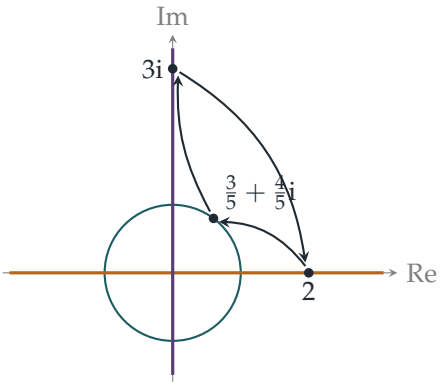
$y=1$이 되려면 $x+1 = x-1$이어야 하는데 이는 불가능하므로, 이 값은 정의된다. 이제

$$y+1 = \frac{2x}{x-1}, \qquad y-1 = \frac{2}{x-1},$$

이므로

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x \qquad \text{모든 실수} x \neq 1.$$

f를 세 번 적용하면 처음 자리로 돌아온다. 세 번째 적용이 허수축을 다시 실수축으로 보내기 때문이다. 그림은 $x = 2$일 때의 순환 $2 \mapsto \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \mapsto 3\mathrm{i} \mapsto 2$를 보여 준다.



검산

- $x = 0$: $\mathrm{f}(0) = -1$이며, 이는 단위원 위에 있으므로 (i)과 일치한다. 이어서 $\mathrm{f}(-1) = \dfrac{-\mathrm{i}-1}{-\mathrm{i}+1} = -\mathrm{i}$로 $\mathrm{i}\frac{0+1}{0-1}$과 일치하고, $\mathrm{f}(-\mathrm{i}) = \frac{1-1}{1+1} = 0$이다.
- $x = 2$: 소문항 (i)에서 $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$, 소문항 (iii)에서 $3\mathrm{i}$를 얻고, 소문항 (iv)에서 2로 돌아온다. 무작위로 고른 실수 x (그리고 무작위 복소수 z) 10^4개에 대한 수치 검산으로 위의 모든 식이 반올림 오차 범위 안에서 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- (i)에서 구한 실수부와 허수부를 f에 직접 대입하는 것. 그렇게 해도 되지만 계산이 무겁고 틀리기 쉽다. z에 대하여 합성하는 편이 훨씬 깔끔하다.
- $\mathrm{f}(1) = \mathrm{i}$이고 $\mathrm{f}(\mathrm{i})$의 분모가 0이 되므로, (iii)과 (iv)에서 $x = 1$을 제외해야 한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

$z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ 꼴의 함수를 **뫼비우스 변환**(*Möbius transformation*)이라 한다. 이러한 사상은 원과 직선을 원과 직선으로 보낸다. 여기서 본 것처럼 실수축은 단위원으로, 단위원은 허수축으로, 그리고 다시 실수축으로 돌아간다. 두 뫼비우스 변환의 합성은

2×2 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 곱에 대응한다. 사실 모든 복소수 z에 대하여 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))) = z$이므로, f는 뫼비우스 변환의 군(group)에서 위수(order)가 3이다. 또한 (i)에 $x = \tan\frac{\theta}{2}$를 대입하면 $\mathrm{f}(x) = -\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$를 얻는데, 이는 익숙한 "$t$-치환"에 의한 원의 매개변수화(parametrisation)이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에는 뫼비우스 변환과 그 기하에 관한 아름다운 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.