풀이

STEP I 1994, 문제 5

순수수학 • 포물선 위의 자취

> **STEP I 1994, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q5

핵심 아이디어

먼저 기하학적 조건을 대수로 바꾼다. 원점에서의 직각은 위치벡터(position vector) $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 수직(perpendicular)이라는 뜻이며, $y = x^2$ 위의 점에 대해서는 이것이 p와 q 사이의 하나의 깔끔한 관계식으로 정리된다. 그러면 두 점 R와 T의 좌표가 모두 p와 q에 대해 대칭이므로, 모든 것을 $p+q$와 pq로 나타낸 뒤 소거한다.

풀이

직각이 될 조건

P와 Q 중 어느 것도 원점일 수 없다. 원점이라면 각이 정의되지 않기 때문이다. 따라서 $p \neq 0$이고 $q \neq 0$이다. 각 POQ가 직각일 필요충분조건은 $\overrightarrow{OP} = (p, p^2)$와 $\overrightarrow{OQ} = (q, q^2)$의 스칼라곱(scalar product)이 0이 되는 것이다.

$$pq + p^2q^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq(1+pq) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq = -1,$$

여기서 $pq \neq 0$으로 나누었다. (같은 말로, OP와 OQ의 기울기(gradient) p와 q의 곱이 -1이다.)

따라서 구하는 쌍은 정확히 $p \neq 0$인 $q = -1/p$이다. p가 0이 아닌 모든 실수를 움직일 때, 합

$$s = p + q = p - \frac{1}{p}$$

는 모든 실숫값을 취한다. 임의의 s가 주어지면 이차방정식(quadratic) $p^2 - sp - 1 = 0$의 판별식(discriminant)이 $s^2 + 4 > 0$이므로 실근을 가지며, 두 근의 곱이 -1이므로 어느 근도 0이 아니다. 아래의 자취(locus)가 곡선의 일부가 아니라 곡선 전체임을 말할 때 이 사실

이 필요하다.

소문항 (i)

PQ의 중점은

$$R = \left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2} \right).$$

이다. $R = (x, y)$라 하면 $p + q = 2x$이다. $pq = -1$을 이용하면

$$y = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{2} = \frac{4x^2+2}{2} = 2x^2 + 1.$$

$p + q$가 모든 실숫값을 취하므로 x도 그러하고, 따라서 R의 자취는 포물선(parabola)

$$y = 2x^2 + 1,$$

전체이다. 꼭짓점(vertex)은 $(0, 1)$이고 축(axis)은 y축이다. 이 포물선은 $y = x^2$보다 폭이 좁고, $2x^2 + 1 - x^2 = x^2 + 1 > 0$이므로 완전히 그 위쪽에 놓인다. 이는 R가 볼록(convex) 곡선의 현(chord)의 중점이라는 사실과 잘 맞는다.

소문항 (ii)

$y = x^2$을 미분하면 P에서의 접선(tangent)의 기울기는 $2p$이므로, 그 방정식은

$$y - p^2 = 2p(x - p), \qquad \text{즉,} \qquad y = 2px - p^2,$$

이고, 마찬가지로 Q에서의 접선은 $y = 2qx - q^2$이다. $p \neq q$이므로(두 수의 곱이 -1이므로 같을 수 없다) 두 접선은 평행하지 않다. 두 방정식을 빼면

$$2(p - q)x = p^2 - q^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p+q}{2},$$

이고, 여기서 $p - q \neq 0$으로 나누었다. 그러면

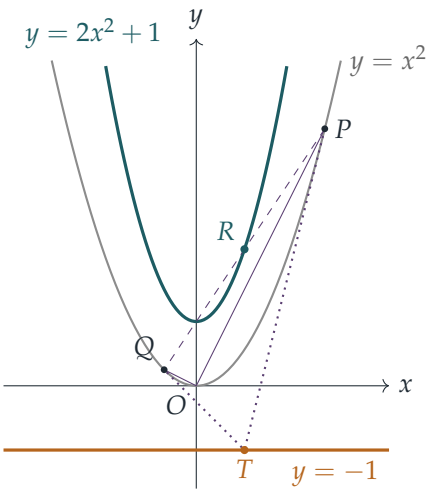
$$y = 2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = pq = -1.$$

? **생각해 보기** T의 y좌표는 상수이다. 자취는 한 점인가, 선분인가, 아니면 직선 전체인가?

T의 x좌표는 $\frac{1}{2}(p + q)$이고, 앞에서 이것이 모든 실숫값을 취함을 보였다. 따라서 T는 직선 위 어디에나 있을 수 있고, T의 자취는 직선

$$y = -1.$$

전체이다. 또한 T는 항상 R의 바로 아래에 있다는 점에 주목하자. 두 점의 x좌표가 모두 $\frac{1}{2}(p + q)$이기 때문이다.



그림은 $p = 2, q = -\frac{1}{2}$인 한 경우를 보여 준다. 이때 $R = (\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$는 청록색 포물선 위에, $T = (\frac{3}{4}, -1)$는 호박색 직선 위에 있다.

검산

$p = 1, q = -1$로 두자. 그러면 $P = (1, 1)$, $Q = (-1, 1)$이고, OP, OQ는 직선 $y = \pm x$로서 분명히 수직이다. 중점은 $(0, 1)$로 $y = 2x^2 + 1$의 꼭짓점이며, 접선 $y = 2x - 1$과 $y = -2x - 1$은 $y = -1$ 위의 점 $(0, -1)$에서 만난다. 그림에서처럼 $p = 2, q = -\frac{1}{2}$이면 $2 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{17}{8}$로, 예상대로이다. 10^5개의 무작위 p 값에 대한 수치 검산으로, R가 약 10^{-10} 이내의 오차로 $y = 2x^2 + 1$을 만족하고 T가 항상 $y = -1$을 가짐을 확인하였다.

흔한 실수

- $pq(1 + pq) = 0$에서 멈추고 $pq = 0$이 왜 배제되는지 설명하지 않는 것. $pq = 0$이면 P 또는 Q가 원점에 놓인다.
- 모든 x가 실제로 나타나는지 확인하지 않고 자취의 방정식만 제시하는 것. 이를 확인해야 그래프가 곡선의 일부가 아니라 전체임을 알 수 있다.
- T가 준선(directrix) 위에 있다고 가정하는 것. $y = x^2$의 준선은 $y = -\frac{1}{4}$이다. 접선들이 준선 위에서 만나는 것은 PQ가 초점(focus)을 지날 때이며, 이는 $\angle POQ = 90°$와는 다른 조건이다.

STEP 너머

여기서 현 PQ는 항상 고정점 $(0,1)$을 지난다. 그 방정식이 $y = (p+q)x - pq = (p+q)x + 1$이기 때문이다. 한 고정점을 지나는 직선족과, 이에 대응하여 접선들이 만나는 "극(pole)"(여기서는 $(0,1)$의 극선(polar)인 직선 $y = -1$ 위에 있다)은 사영기하학(projective geometry)의 출발점이다. 사영기하학에서는 원뿔곡선(conic)과 그 극–극선 관계를 체계적으로 연구한다. 이런 성격의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.