풀이

STEP I 1994, 문제 4

순수수학 • 역탄젠트 적분

> **STEP I 1994, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q4

핵심 아이디어

소문항 (i)은 반각 항등식(half-angle identity)이고, 소문항 (ii)는 "완전제곱식(completing the square)으로 만든 뒤 $\tan^{-1}$을 쓰는" 표준적인 적분이다. 마지막 적분은 $k = \cos\alpha$로 둔 소문항 (ii)이며, 이때 $\sqrt{1-k^2} = \sin\alpha$가 되어 분자의 인수 $\sin\alpha$와 약분된다. 정말로 주의해야 할 곳은 마지막 단계뿐이다. 탄젠트 값에 $\tan^{-1}$을 취하면 그 각이 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에 있을 때에만 원래의 각이 다시 나온다.

풀이

소문항 (i)

배각 공식(double-angle formulae) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$와 $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$를 쓰면

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha,$$

이고, 이 식은 $\sin\alpha \neq 0$일 때(따라서 양변이 모두 정의될 때) 항상 성립한다. 이것이 보여야 할 내용이었다.

소문항 (ii)

분모를 완전제곱식으로 만든다.

$$1 - 2kx + x^2 = (x-k)^2 + (1-k^2).$$

$|k| < 1$이므로 상수 $1-k^2$은 양수이고, 따라서 $a = \sqrt{1-k^2} > 0$으로 두어 $1-k^2 = a^2$이라 쓸 수 있다. (조건 $|k| < 1$이 쓰이는 곳이 바로 여기이다. 그렇지 않으면 분모가 인수분해되

어 로그가 나온다.) $x-k=a\tan\theta$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$이므로

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^2+a^2}&=\int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta=\int\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\theta}{a}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-k}{\sqrt{1-k^2}}\right)+C,\end{aligned}$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. (같은 이야기로, 우변을 미분해 보아도 된다. 연쇄 법칙(chain rule)에 의해 $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1/a}{1+(x-k)^2/a^2}=\dfrac{1}{(x-k)^2+a^2}$이다.)

마지막 적분

$k=\cos\alpha$로 두자. $0<\alpha<\pi$이므로 $|k|<1$이고, 따라서 소문항 (ii)를 적용할 수 있으며, $\sin\alpha>0$이므로

$$\sqrt{1-k^2}=\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$$

이다(이 구간에서 $\sin\alpha>0$이므로 $-\sin\alpha$가 아니다). 따라서 분자의 인수 $\sin\alpha$가 소문항 (ii)의 인수 $1/\sqrt{1-k^2}$과 약분된다.

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x&=\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^1\\&=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\tan^{-1}(\tan\tfrac{1}{2}\alpha)+\tan^{-1}(\cot\alpha),\end{aligned}$$

여기서 첫째 항에는 소문항 (i)을, 둘째 항에는 $\tan^{-1}$이 기함수(odd function)라는 사실을 썼다.

> **?** **생각해 보기** $\tan^{-1}(\tan\theta)$는 항상 θ와 같은가?

그렇지 않다. $\tan^{-1}$의 값은 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에 속하므로, $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$는 θ가 그 구간에 있을 때에만 성립한다. 각 항을 확인해 보자.

- $0<\alpha<\pi$이므로 $0<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{2}$이고, 따라서 $\tan^{-1}\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha$이다.
- $\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$로 쓰자. $0<\alpha<\pi$이므로 각 $\frac{\pi}{2}-\alpha$는 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$에 있고, 따라서 $\tan^{-1}(\cot\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$이다.

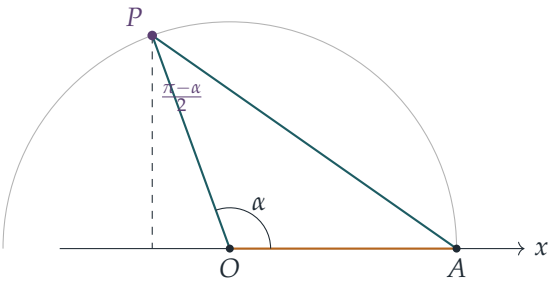
두 항을 더하면

$$\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

다른 방법: 그림으로 보기

이 답에는 멋진 기하학적 이유가 있다. 단위원(unit circle) 위의 점 $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, 원점 O, 점 $A = (1,0)$을 생각하자. 점 $X = (x,0)$이 x축을 따라 움직일 때, PX와 P를 지나는 아래쪽 수직선 사이의 각 θ는 $\tan\theta = (x - \cos\alpha)/\sin\alpha$를 만족하고, 피적분함수(integrand)는 정확히 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$이다. 따라서 이 적분은 X가 O에서 A까지 움직이는 동안 쓸고 지나간 각, 곧 각 OPA이다. 삼각형 OPA는 $OP = OA = 1$이고 O에서의 꼭지각이 α인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로, 두 밑각은 각각 $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$이다.



검산

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$일 때 적분은 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$이고, 공식도 $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$를 준다.
- 수치적으로 $\alpha = 1$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)은 $1.0707963\ldots$을 주며, 이는 $\frac{1}{2}(\pi - 1) = 1.0707963\ldots$과 일치한다.
- $\alpha \to \pi^-$일 때 $[0,1]$의 각 x에 대하여 피적분함수는 0으로 가고, $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$도 마찬가지이다.

흔한 실수

- $\frac{\pi}{2} - \alpha$가 $\tan^{-1}$의 치역에 있는지 확인하지 않고 $\tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$라고 쓰는 것. 같은 변형은 α가 $(0,\pi)$ 밖에 있으면 성립하지 않는다.
- 이유를 밝히지 않고 $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$를 $\sin\alpha$로 두는 것. 여기서는 $0 < \alpha < \pi$이기 때문에 그렇게 할 수 있다.

STEP 너머

$\alpha \to 0^+$일 때 답은 $\frac{\pi}{2}$로 가지만, $\alpha = 0$에서 피적분함수는 항등적으로 0이다. 피적분함수가 $x = 1$ 근처에서 높고 좁은 뾰족한 모양이 되는데, 그 넓이는 줄어들지 않기 때문이다.

이것은 반평면의 푸아송 핵(Poisson kernel)이며, 극한과 적분의 순서를 함부로 바꾸면 틀린 답이 나온다. 언제 그런 교환이 허용되는지는 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 질문이다. Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라. "대응하는 각(angle subtended)"이라는 기하학적 그림은 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)에 아름답게 전개되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.