풀이

STEP I 1994, 문제 2

순수수학 • 로그 미분법

> **STEP I 1994, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q2

핵심 아이디어

거듭제곱 미분법(power rule)은 변수가 밑에 있고 지수가 고정되어 있을 때 쓸 수 있고, 지수함수 미분법(exponential rule)은 밑이 고정되어 있고 변수가 지수에 있을 때 쓸 수 있다. x가 두 자리에 모두 나타나는 순간, 어느 법칙도 바로 적용할 수 없다. 해결책은 모든 것을 e의 거듭제곱으로 나타내는 것, 또는 같은 말이지만 양변에 로그를 취한 뒤 음함수 미분(implicit differentiation)을 하는 것이다. 로그는 다루기 힘든 거듭제곱을 곱으로 바꾸어 주고, 곱은 우리가 다룰 수 있다.

전체에 걸쳐 $x > 0$이라 하고(그렇지 않으면 x^x와 $\ln x$는 의미가 없다), (ii)에서 밑 a는 양수여야 한다.

풀이

반복해서 쓰는 도구는 하나뿐이다. $u > 0$일 때

$$u^v = \mathrm{e}^{v \ln u},$$

이므로 $y = u^v$이면 $\ln y = v \ln u$이고, 연쇄 법칙(chain rule)으로 미분하면 $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v \ln u)$를 얻는다.

소문항 (i)

여기서는 지수가 상수이므로 보통의 거듭제곱 미분법이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^a = a\, x^{a-1}.$$

이것이 정수뿐 아니라 모든 실수 a에 대해 성립하는 이유를 알고 싶다면 $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$로 쓰면 된다. 연쇄 법칙에 의해 $\mathrm{e}^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = a\, x^a / x = a\, x^{a-1}$이다.

소문항 (ii)

이번에는 밑이 상수이다. $\ln a$가 그저 상수임에 유의하여 $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$로 쓰면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = \ln a\, \mathrm{e}^{x \ln a} = a^x \ln a.$$

이것이 (i)과 얼마나 다른지 주목하라. 답은 $x\, a^{x-1}$이 아니다.

소문항 (iii)

$y = x^x$라 하자. 로그를 취하면 $\ln y = x \ln x$이다. 양변을 미분하되 우변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓰면

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x,$$

따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^x = x^x\,(1 + \ln x).$$

? **생각해 보기** 그냥 거듭제곱 미분법을 써서 $x \cdot x^{x-1} = x^x$를 얻으면 왜 안 되는가?

거듭제곱 미분법은 지수가 상수라고 가정하고, 지수함수 미분법은 밑이 상수라고 가정한다. 여기서는 둘 다 변한다. 사실 정답은 두 "틀린" 답의 합과 정확히 같다. 지수를 고정된 것으로 보면 $x \cdot x^{x-1} = x^x$를, 밑을 고정된 것으로 보면 $x^x \ln x$를 얻는데, 참인 도함수는 $x^x + x^x \ln x$이다. 이것은 다변수 연쇄 법칙(multivariable chain rule)이 모습을 바꾸어 나타난 것이다. $y = u^v$일 때 각 변수가 저마다의 변화율을 보태는 것이다.

소문항 (iv)

$y = x^{(x^x)}$라 하자. 이것은 지수 자체가 x^x인 탑 모양의 거듭제곱이다. 로그를 취하면

$$\ln y = x^x \ln x.$$

우변을 곱의 미분법으로 미분하되, x^x의 도함수는 (iii)의 결과를 쓴다.

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^x(1 + \ln x) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right).\end{aligned}$$

$y = x^{(x^x)}$를 곱하고 x의 거듭제곱을 합치면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^{(x^x)} = x^{(x^x)}\, x^x \left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right) = x^{x^x + x}\left(\frac{1}{x} + \ln x + (\ln x)^2\right).$$

$\frac{1}{x}$를 괄호 밖으로 빼서 정리하면 $x^{x^x+x-1}(1 + x\ln x + x(\ln x)^2)$로도 쓸 수 있다.

소문항 (v)

> **?** **생각해 보기** $(x^x)^x$는 (iv)의 식과 같은 것이 아닌가?

그렇지 않다. 지수법칙(law of indices) $(u^m)^n = u^{mn}$에 의해 $(x^x)^x = x^{x\cdot x} = x^{x^2}$인데, (iv)에서는 지수가 x^2이 아니라 x^x이다. 두 식은 $x = 1$과 $x = 2$에서 우연히 일치하지만($x = 2$에서 둘 다 16이다), $x = 3$에서는 하나는 3^{27}이고 다른 하나는 겨우 3^9이다.

그러므로 $y = x^{x^2}$이라 하자. 그러면 $\ln y = x^2 \ln x$이고, 곱의 미분법에 의해

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x\,(1 + 2\ln x).$$

따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(x^x)^x = x^{x^2} \cdot x\,(1 + 2\ln x) = x^{x^2+1}\,(1 + 2\ln x).$$

(대신 $(x^x)^x$를 직접 미분해도 된다. $\ln y = x\ln(x^x) = x^2\ln x$로 같은 식이 나온다.)

검산

- $x = 1$에서 (iii), (iv), (v)는 모두 도함수 값 1을 준다. 예를 들어 (iv)에서는 $1^{1+1}(1 + 0 + 0) = 1$이다. 중심 차분(central difference) $\big(f(1.000001) - f(0.999999)\big)/0.000002$도 이와 일치한다.
- x^x는 $1 + \ln x = 0$이 되는 $x = \mathrm{e}^{-1}$에서 최솟값을 갖고, $(x^x)^x = x^{x^2}$은 $1 + 2\ln x = 0$이 되는 $x = \mathrm{e}^{-1/2}$에서 최솟값을 갖는다. 둘 다 그래프 계산기로 확인할 수 있다.
- $0.2 \le x \le 2.5$ (그리고 $0.2 \le a \le 4$)인 임의의 점 2000개에서 모든 공식을 수치 미분값과 비교했는데, 상대 오차는 항상 10^{-9}보다 작았다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x\cdot x^{x-1}$ 또는 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = x\,a^{x-1}$로 쓰는 것. 거듭제곱 미분법은 지수가 상수여야 한다.
- (iv)와 (v)를 같은 함수로 취급하는 것. 거듭제곱은 결합법칙(associativity)이 성립하지 않는다. 일반적으로 $x^{(x^x)} \neq (x^x)^x$이다.

► $\ln y$를 미분한 뒤 다시 y를 곱하는 것을 잊는 것.

STEP 너머

a가 무리수일 때, 예컨대 $x^{\sqrt{2}}$에서 x^a는 도대체 무슨 뜻일까? 대학에서는 먼저 exp를 멱급수(power series)로 정의하고 ln을 그 역함수로 정의한 뒤, $u > 0$에 대해 $u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$로 정의하는 것이 답이다. 그러면 모든 지수법칙과 위의 도함수들은 정리(theorem)가 된다. 이 내용은 Abbott의 *Understanding Analysis*나 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*에서 꼼꼼하게 다룬다. (iii)에서 본 "두 틀린 답의 합"은 편도함수(partial derivative)와 다변수 연쇄 법칙을 처음 엿보는 것이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.