풀이

STEP I 1994, 문제 14

확률과 통계 • 지수분포의 순서통계량

STEP I 1994, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/94-s1-q14

핵심 아이디어

각 T_i는 지수분포(exponential distribution)를 따르므로, 소문항 (i)은 표준적인 부분적분(integration by parts) 두 번으로 해결된다. 마지막 에세이와 첫 에세이에 대해서는 최댓값(maximum)이나 최솟값(minimum)에 관한 명제를 **모든** T_i에 관한 명제로 바꾸는 것이 요령이다. 마지막 에세이가 시각 u까지 제출되는 것은 모든 에세이가 그때까지 제출되는 것과 정확히 같고, 첫 에세이가 시각 t에 아직 제출되지 않은 것은 모든 에세이가 그때까지 제출되지 않은 것과 정확히 같다. 그러면 독립성(independence)에 의해 "모두"가 곱으로 바뀌고, 분포함수(distribution function)를 미분하면 확률밀도함수(probability density function)를 얻는다.

풀이

소문항 (i)

T_i 중 어느 하나를 X라 하고, 그 확률밀도함수를 $t \geq 0$에 대하여 $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$라 하자. $u = t$, $\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$(따라서 $v = -\mathrm{e}^{-\lambda t}$)로 놓고 부분적분하면

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty t\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

이다. 여기서 $t \to \infty$일 때 $t\mathrm{e}^{-\lambda t} \to 0$이기 때문이다(지수함수가 거듭제곱보다 빠르게 변한다). 같은 방법으로

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty t^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2},$$

이다. 여기서 $\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$가 $\frac{1}{\lambda}\mathrm{E}(X)$임을 이용하였다. 따라서

$$\mathrm{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T_i) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

소문항 (ii)

먼저 하나의 T_i의 분포함수가 필요하다. $u \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(T_i \leq u) = \int_0^u \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}.$$

이제 $U = \max(T_1, \ldots, T_n)$이고, T_i 중 가장 큰 것이 u 이하일 필요충분조건은 그 모두가 u 이하인 것이다.

$$\{U \leq u\} = \{T_1 \leq u\} \cap \{T_2 \leq u\} \cap \cdots \cap \{T_n \leq u\}.$$

생각해 보기 여기서 확률을 곱해도 되는 이유는 무엇인가?

사건 $\{T_i \leq u\}$들은 서로 다른 T_i에 관한 것이고, 가정에 의해 이들은 독립이므로 교집합의 확률은 각 확률의 곱이다. 따라서 $u \geq 0$에 대하여

$$\mathrm{P}(U \leq u) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i \leq u) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^n,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. U의 확률밀도함수는 이 분포함수의 도함수이다. 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$f_U(u) = n(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^{n-1} \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} = n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^{n-1} \qquad (u \geq 0),$$

이고, $u < 0$이면 $f_U(u) = 0$이다.

소문항 (iii)

이제 $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$이다. 여기서 유용한 것은 여사건(complement)이다. 첫 에세이가 시각 t 이후에 도착할 필요충분조건은 그때까지 **하나도** 도착하지 않은 것, 즉 모든 $T_i > t$인 것이다. $\mathrm{P}(T_i > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$와 다시 독립성을 이용하면

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i > t) = (\mathrm{e}^{-\lambda t})^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0).$$

따라서 $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t}$이고, 이를 미분하면

$$f_T(t) = n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0),$$

이며, $t < 0$이면 $f_T(t) = 0$이다.

소문항 (iv)

(iii)의 확률밀도함수는 소문항 (i)의 확률밀도함수에서 λ를 $n\lambda$로 바꾼 것과 정확히 같다. 즉 T는 모수(parameter)가 $n\lambda$인 지수분포를 따른다. 따라서 소문항 (i)로부터 바로

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{n\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

을 쓸 수 있다. 이는 직관과도 맞는다. 학생이 n명이면 첫 에세이는 특정한 한 에세이보다 대략 n배 빨리 도착할 것이다.

검산

- $n = 1$이면 에세이가 하나뿐이므로 $T = U = T_1$이다. 실제로 두 확률밀도함수 모두 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$가 된다.
- $\mathrm{P}(U \le u)$는 $u = 0$에서 0이고 $u \to \infty$일 때 1로 증가한다. 분포함수라면 마땅히 그래야 한다.
- $n = 5, \lambda = 0.7$인 학급 2×10^5개를 모의실험(simulation)하였다. 예를 들어 $U \le 2$인 비율은 0.2425로 $(1 - \mathrm{e}^{-1.4})^5 \approx 0.2427$과 비교되고, T의 평균은 0.2860으로 $1/(5 \times 0.7) \approx 0.2857$과 비교된다. 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 f_U의 적분값이 1임을 확인하였다.

흔한 실수

- 최솟값에 대하여 $\mathrm{P}(T \le t)$를 직접 다루는 것. "적어도 하나의 $T_i \le t$"는 교집합이 아니므로 곱으로 분해되지 않는다. $\mathrm{P}(T > t)$를 거쳐야 한다.
- 곱을 정당화하는 것이 독립성이라는 사실을 밝히지 않는 것.
- $\mathrm{Var}(T_i) = \mathrm{E}(T_i^2) = 2/\lambda^2$로 쓰고 $(\mathrm{E}\,T_i)^2$을 빼는 것을 잊는 것.

STEP 너머

T와 U는 표본의 가장 작은 **순서통계량**(order statistics)과 가장 큰 순서통계량이다. 독립인 지수분포 확률변수들의 최솟값이 비율(rate)을 모두 더한 지수분포를 따른다는 사실은 푸아송 과정(Poisson process)과 대기행렬 이론(queueing theory)의 기초이다. 무기억성(memoryless property)으로부터 얻어지는 또 하나의 아름다운 사실은, 연이은 에세이 사이의 간격들이 비율이 각각 $n\lambda, (n-1)\lambda, \ldots, \lambda$인 독립인 지수분포를 따른다는 것이고, 따라서 $\mathrm{E}(U) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$이다. 이 두 내용은 Grimmett와 Welsh의 *Probability:*

An Introduction(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에서 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.