풀이

STEP I 1994, 문제 11

역학 • 경사면 위의 연결된 입자

STEP I 1994, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

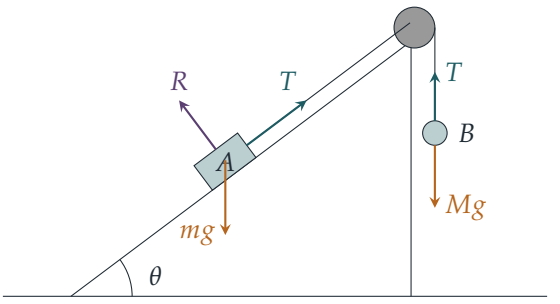
step.maths.org/questions/94-s1-q11

핵심 아이디어

기하적인 상황부터 살펴보자. 줄의 길이는 궤도의 길이와 정확히 같으므로, 수레(wagon)가 궤도의 맨 아래에 있을 때 공은 도르래(pulley) 바로 옆에 매달려 있다. 따라서 공은 경사면(incline)의 높이 $d\sin\theta$만큼 떨어지고, 수레는 경사면을 따라 같은 거리만큼 올라간다. 줄이 팽팽한(taut) 동안 계는 일정한 하나의 가속도로 움직인다. 공이 땅에 닿으면 줄이 느슨해지고(slack), 수레는 매끄러운 경사면을 따라 관성으로 올라갈 뿐이다. 따라서 소문항 (ii)는 수레에 남은 속력이 도르래까지 남은 거리를 다 갈 만큼 충분한지를 묻는 것이다.

풀이

수레와 공을 질점(particle)으로, 궤도를 매끄러운(smooth) 면으로, 줄을 가볍고 늘어나지 않는(inextensible) 줄로 보고, 줄은 가볍고 마찰 없는 도르래에 걸려 있다고 모형화한다. 따라서 장력(tension) T는 양쪽에서 같고, 줄이 팽팽한 동안 수레와 공의 속력은 같다.



소문항 (i)

공이 아래쪽으로 움직이는 가속도를 a라 하자. 이것은 수레가 경사면 위쪽으로 움직이는 가속도이기도 하다. 공(연직 방향)과 수레(경사면 방향)에 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$Mg - T = Ma,$$
$$T - mg\sin\theta = ma.$$

수직항력(normal reaction) R는 경사면에 수직이므로 식에 들어가지 않는다. 두 식을 더하면 T가 소거되어

$$a = \frac{(M - m\sin\theta)\,g}{M+m}.$$

계는 정지 상태에서 출발하므로, 공이 조금이라도 움직이려면 $a > 0$이어야 한다. ($a \le 0$이면 아무 일도 일어나지 않는다. $a = 0$이면 계는 평형(equilibrium) 상태를 유지하고, 줄은 밀 수 없으므로 $a < 0$은 불가능하다.) 따라서 공이 땅에 떨어질 필요충분조건은

$$M > m\sin\theta.$$

수레가 궤도의 맨 아래에 있을 때 줄의 전체 길이 d가 경사면을 따라 놓이므로, 공은 도르래와 같은 높이, 즉 지면에서 $d\sin\theta$ 높이에서 출발한다. 공은 정지 상태에서 일정한 가속도 a로 이 거리만큼 떨어지므로, $v^2 = u^2 + 2as$에 의해

$$v^2 = 2\cdot\frac{(M - m\sin\theta)g}{M+m}\cdot d\sin\theta = \frac{2g(M - m\sin\theta)\,d\sin\theta}{M+m},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

소문항 (ii)

공이 땅에 닿을 때 수레는 궤도를 따라 $d\sin\theta$만큼 올라가 있고 속력 v로 움직이고 있다. 도르래까지 남은 거리는

$$d - d\sin\theta = d(1 - \sin\theta)$$

이다.

생각해 보기 공이 땅에 닿은 뒤 줄은 어떻게 되는가?

공은 멈추지만 수레는 여전히 경사면을 따라 도르래 쪽으로 움직이고 있다. 따라서 줄이 느슨해지고 $T = 0$이 된다. 이제 경사면 방향으로 작용하는 힘은 중력의 성분뿐이므로, 수레는 $g\sin\theta$의 크기로 감속한다(decelerates). 수레는 $0 = v^2 - 2g\sin\theta\, s$로 주어지는 거리 s만큼 더 간 뒤 멈춘다.

$$s = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = \frac{(M - m\sin\theta)\,d}{M+m}.$$

(그 뒤 수레는 다시 아래로 굴러 내려가고, 도르래 근처에서는 더 이상 아무 일도 일어나지 않는다.)

수레가 도르래에 닿기 전에 멈추면, 즉 $s < d(1-\sin\theta)$이면 수레는 도르래와 충돌하지 않는다. $d > 0$이고 $M + m > 0$이므로 이는 다음과 동치이다.

$$\begin{aligned} M - m\sin\theta &< (M+m)(1-\sin\theta) \\ &= M + m - M\sin\theta - m\sin\theta, \end{aligned}$$

이를 정리하면 $M\sin\theta < m$이다.

이것을 소문항 (i)의 결과와 합치면, 공이 땅에 닿고 수레가 도르래에 이르기 전에 멈출 필요충분조건은

$$m\sin\theta < M < \frac{m}{\sin\theta}.$$

$M\sin\theta = m$이면 수레는 속력 0으로 도르래에 딱 도달한다. 이것은 살짝 닿는 것이지 충돌이 아니다.

검산

- 수레가 궤도에서 가장 멀리 올라가는 거리는 $d\sin\theta + s = \dfrac{Md(1+\sin\theta)}{M+m}$이다. 이것이 d보다 작을 필요충분조건은 $M\sin\theta < m$이며, 위의 조건과 일치한다. $m \to 0$이면 이 값은 $d(1+\sin\theta) > d$로 수렴한다. 예상대로 무게가 없는 수레는 언제나 도르래에 부딪힌다.
- $\theta = 90^\circ$에서는 조건 $M < m$이 소문항 (i)의 $M > m\sin\theta = m$과 모순된다. 이는 옳다. 연직 궤도에서는 수레가 도르래 바로 아래인 맨 밑에서, 공은 맨 위에서 출발하고, 수레는 공이 떨어진 거리만큼 정확히 올라가므로 도르래까지 끝까지 올라간다.
- 수치로 확인해 보자. $m = 2, M = 1.5, \theta = 30^\circ, d = 3, g = 9.8$이면 공식에서 $v^2 = 4.2$이고, 가장 멀리 간 지점은 $\frac{27}{14} \approx 1.93 < 3$이다. 짧은 시간 간격으로 운동을 단계적으로 계산해도 같은 값이 나온다. 무작위로 고른 경우들에서도 충돌은 정확히 $M\sin\theta > m$일 때 일어남이 확인된다.

흔한 실수

- 공이 떨어지는 거리를 $d\sin\theta$가 아니라 d로 잡는 것. 공은 도르래 위치에서 출발하며, 도르래의 높이는 $d\sin\theta$이다.
- 공이 땅에 닿은 뒤에도 줄이 팽팽하다고 가정하거나, 관성으로 올라가는 단계를 아예 잊고 $d\sin\theta$와 d만 비교하는 것.

▶ 줄이 느슨해진 뒤 수레의 감속도로 $g\sin\theta$ 대신 g를 쓰는 것.

STEP 너머

이 문제는 운동을 서로 다른 구속 조건이 적용되는 단계로 나눈다. 줄이 팽팽한 단계와 그 다음 줄이 느슨한 단계이다. 이것은 당길 수는 있지만 밀 수는 없는 **일방적 구속**(*unilateral constraint*)의 가장 간단한 예이다. 이러한 구속 조건은 탁자에서 떨어지는 사슬부터 로봇 공학의 접촉 문제에 이르기까지 역학 전반에 등장한다. 여기서는 에너지 방법이 빠른 대안이 된다. 관성으로 올라가는 단계에서 수레의 운동 에너지(kinetic energy) $\frac{1}{2}mv^2$는 위치 에너지(potential energy) $mgs\sin\theta$로 바뀐다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 관점을 모두 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.