풀이

STEP I 1994, 문제 10

역학 • 원운동

> **STEP I 1994, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q10

핵심 아이디어

이 문제는 늘어나는 줄로 된 원뿔 진자(conical pendulum)이다. 입자에는 연직 방향의 가속도가 없으므로 장력(tension)의 연직 성분은 무게와 평형을 이루고, 수평 성분은 구심력(centripetal force)을 제공한다. 새로운 점은 원의 반지름이 늘어난 길이(extension)에 따라 달라지고, 늘어난 길이는 다시 장력에 따라 달라진다는 것이다. 그래서 훅의 법칙(Hooke's law)이 모든 것을 하나로 묶어 준다. 부등식은 $\cos\theta$의 어떤 값들이 실제로 원운동을 나타내는지를 따져 보는 데서 나온다.

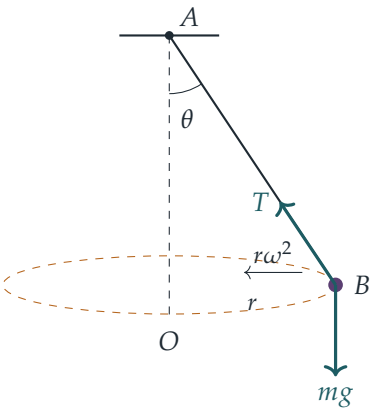
풀이

$\cos\theta$ 구하기

B를 입자로, AB를 훅의 법칙을 따르는 가벼운 탄성 줄로 모형화한다. 늘어난 길이를 x, 장력을 T라 하면

$$T = \frac{\lambda x}{l}, \qquad AB = l + x.$$

입자는 A의 연직 아래에 있는 점 O를 중심으로 반지름 $r = (l + x)\sin\theta$인 수평 원 위를 움직인다. 입자에 작용하는 힘은 무게와 BA 방향의 장력뿐이다.



연직 방향으로 힘을 분해하면 (연직 방향의 가속도는 없다)

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

중심 O를 향하는 수평 방향으로 힘을 분해하면 (가속도는 $r\omega^2$)

$$T\sin\theta = m\omega^2(l+x)\sin\theta.$$

진짜 원운동이라면 $\sin\theta \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$T = m\omega^2(l+x). \tag{2}$$

이제 훅의 법칙에 의해 $\lambda x/l = m\omega^2(l+x)$, 즉

$$x\left(\lambda - m\omega^2 l\right) = m\omega^2 l^2.$$

$x > 0$이고 ((1)에서 $T > 0$이므로 줄은 늘어나 있다) $m\omega^2 l^2 > 0$이므로 $\lambda - m\omega^2 l > 0$이고

$$x = \frac{m\omega^2 l^2}{\lambda - m\omega^2 l}, \qquad l + x = \frac{l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l}.$$

그러면 (2)에서

$$T = \frac{m\omega^2 l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l},$$

이고, (1)에서

$$\boxed{\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{g\left(\lambda - m\omega^2 l\right)}{l\lambda\,\omega^2}}$$

운동이 가능한 경우

? **생각해 보기** $\cos\theta$에 대한 각각의 제한 조건은 물리적으로 무엇을 뜻하는가?

줄이 팽팽한 상태로 입자가 A 아래에서 수평 원운동을 하려면 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, 즉 $0 < \cos\theta < 1$이어야 한다. 역으로, ω가 위 공식에서 $0 < \cos\theta < 1$을 준다면, ($\lambda - m\omega^2 l > 0$인 상태에서) 앞의 단계를 거꾸로 따라가면 (1)과 (2)를 만족하는 양의 늘어난 길이와 장력이 얻어지므로, 이 운동은 실제로 존재한다.

상계(*upper bound*). 다른 인수들은 모두 양수이므로 $\cos\theta > 0$은 정확히 $\lambda - m\omega^2 l > 0$일 때 성립한다. 이는

$$\omega^2 < \frac{\lambda}{ml}.$$

물리적 의미: ω가 너무 크면 줄이 아무리 유한하게 늘어나더라도 필요한 구심력을 제공할 수 없다. 늘어난 길이만큼 더 큰 힘이 필요한데, 그 필요한 힘이 줄이 제공하는 힘보다 더 빨리 커지기 때문이다.

하계(*lower bound*). $\cos\theta < 1$은

$$g\lambda - gm\omega^2 l < l\lambda\omega^2 \iff g\lambda < \omega^2 l(\lambda + mg) \iff \omega^2 > \frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)},$$

을 뜻한다. 여기서 처음에는 $l\lambda\omega^2 > 0$으로, 마지막에는 $l(\lambda + mg) > 0$으로 나누었으므로 부등호의 방향은 유지된다. 물리적 의미: ω가 너무 작으면 공식은 $\cos\theta \geq 1$을 요구하게 된다. 이때 가능한 것은 입자가 축 위에 정지한 채로 매달려 있는 경우($\theta = 0$)뿐이며, 이는 원운동이 아니다.

두 결과를 합치면, 운동이 가능한 것은

$$\frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)} < \omega^2 < \frac{\lambda}{ml},$$

일 때뿐이다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 하계에서는 $\cos\theta = 1$이다. 이때 줄은 연직이고 장력은 mg, 길이는 $l(\lambda + mg)/\lambda$인데, 이는 정확히 매달린 입자의 평형 길이이다. $\omega^2 = g/(\text{그 길이})$임에 주목하자. 이것은 익숙한 원뿔 진자의 임계 조건 $\omega^2 > g/L$이다.
- $\lambda \to \infty$일 때(늘어나지 않는 줄) 결과는 $\cos\theta = g/(l\omega^2)$가 되어 표준적인 원뿔 진자와 같아지고, 범위는 $\omega^2 > g/l$이 된다.
- 수치적으로, $g = 9.8$로 두고 m, l, λ, ω를 무작위로 골라 훅의 법칙과 수평 방향 방정식을 이분법(bisection)으로 직접 풀면 공식과 같은 $\cos\theta$가 나오고, 분해한 두 방정식이 모두 성립한다. 20 000개의 무작위 경우에서 운동은 정확히 부등식이 성립할 때 존재한다.

흔한 실수

- 반지름으로 $(l + x)\sin\theta$ 대신 $l\sin\theta$를 쓰는 실수: 줄은 늘어나 있다.
- $\sin\theta$로 나누는 것을 정당화하지 않아서, 왜 $\theta = 0$ (따라서 $\cos\theta = 1$)이 제외되는지를 놓치는 실수.
- $\cos\theta < 1$만 증명하고, $\cos\theta > 0$ (즉 늘어난 길이가 양수라는 조건)이 상계를 준다는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

상계는 **폭주**(*runaway*), 즉 불안정성(instability)의 간단한 예이다. $\omega^2 \to \lambda/(ml)$일 때 필요한 늘어난 길이가 한없이 커진다. 같은 현상이 회전하는 탄성 막대나 회전하는 물체의 안정성에서도 나타나며, 하계는 분기(bifurcation), 즉 매달린 평형 상태가 원운동으로 바뀌는 지점이다. 회전 좌표계 역학에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.