풀이

STEP III 1993, 문제 9

순수수학 • 제곱합 부등식

> **STEP III 1993, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q9

핵심 아이디어

여기 나오는 모든 부등식은 제곱의 합이 음이 아니라는 사실을 다른 모습으로 나타낸 것이다. 소문항 (i)은 가장 단순한 경우인 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$이고, 이후 소문항들에서는 **모든** 쌍에 대하여 $(a_i - a_j)^2$를 더한 다음 각 제곱항과 각 곱이 몇 번 나타나는지 세는 방식을 따른다. 일반적인 형태인 (iv)를 얻고 나면, $(\sum a_i)^2$을 제곱항과 교차항(cross term)으로 전개하여 (v)를 얻을 수 있다.

이 풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad P = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

여기서 두 번째 합은 $1 \leq i < j \leq n$인 $\binom{n}{2}$개의 쌍 전체에 대한 합이다.

풀이

소문항 (i)

실수의 제곱은 음이 아니므로

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2,$$

이다. 따라서 $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$이고, 등호는 정확히 $a_1 = a_2$일 때 성립한다.

소문항 (ii)

세 쌍 각각에 (i)을 적용하여 더한다.

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3,$$
$$a_3^2 + a_1^2 \geq 2a_3a_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

각 제곱항은 이 세 줄 중 정확히 두 줄에 나타나므로, 더하면

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2),$$

를 얻고, 양변을 2로 나누면 원하는 결과가 나온다. 같은 내용을 다음과 같이 쓸 수도 있다. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right] \geq 0$이고, 등호는 정확히 $a_1 = a_2 = a_3$일 때 성립한다.

소문항 (iii)

이제 $1 \leq i < j \leq 4$인 쌍 (i, j)는 여섯 개이다. 각각에 (i)을 적용하면

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i^2 + a_j^2) \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j.$$

이다. 좌변에서 a_1^2은 몇 번 나타날까? 첨자 1을 포함하는 쌍마다, 즉 나머지 세 첨자 각각과 짝지어질 때마다 한 번씩 나타난다. 모든 a_k^2에 대해서도 마찬가지이므로 좌변은 $3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$이고, 따라서

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

소문항 (iv)

(i)–(iii)에서 보이는 규칙은 좌변의 계수가 변수의 개수보다 하나 작다는 것이다. 즉 1, 다음은 2 (소문항 (ii)에 2를 곱한 것), 그다음은 3이다.

주장. 임의의 $n \geq 2$와 실수 $a_1, \ldots, a_n$에 대하여

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \qquad \text{즉} \qquad (n-1)S \geq 2P,$$

이고, 등호는 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$일 때 그리고 그때에만 성립한다.

생각해 보기 모든 쌍 $i<j$에 대하여 $a_i^2+a_j^2$를 더할 때, 특정한 a_k^2는 몇 번 나타나는가?

증명(proof). 모든 쌍에 대한 차의 제곱의 합을 생각하자.

$$D=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i^2+a_j^2\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j.$$

첨자 k는 정확히 $n-1$개의 쌍에 속하므로(나머지 $n-1$개의 첨자 각각과 짝지어진다), 첫 번째 합에서 a_k^2는 $n-1$번 나타난다. 그러므로

$$D=(n-1)S-2P.$$

이다. D의 각 항은 실수의 제곱이므로 $D\ge 0$이고, 이로부터 $(n-1)S\ge 2P$를 얻는다. 등호는 모든 $(a_i-a_j)^2$이 0일 때, 즉 모든 a_i가 같을 때 그리고 그때에만 성립한다. ■

$n=2,3,4$를 대입하면 각각 (i), (ii)의 두 배, (iii)이 다시 나온다.

소문항 (v)

여기서는 $n-1>0$이 되도록 $n\ge 2$이어야 한다. 합의 제곱을 전개하면 각 제곱항은 한 번씩, $i\ne j$인 각 곱 a_ia_j는 (a_ia_j와 a_ja_i로) 두 번씩 나타나므로

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=S+2P.$$

이다.

생각해 보기 S에 대한 부등식인 (iv)가 P만 등장하는 부등식에 어떻게 도움이 될 수 있을까?

$n-1>0$이므로 소문항 (iv)의 양변을 부등호 방향을 바꾸지 않고 $n-1$로 나눌 수 있고, 그러면 $S\ge\dfrac{2P}{n-1}$을 얻는다. S 대신 이 하한(lower bound)을 대입하면

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2&=S+2P\\&\ge\frac{2P}{n-1}+2P\\&=\frac{2P+2(n-1)P}{n-1}\\&=\frac{2n}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j,\end{aligned}$$

이 되어 원하는 부등식을 얻는다. 등호는 정확히 (iv)에서 등호가 성립할 때, 즉 모든 a_i가 같을 때 성립한다.

P가 양수일 필요는 전혀 없었다는 점에 주목하자. 이 논증은 $S \geq 2P/(n-1)$의 양변에 $2P$를 더하기만 하므로, P의 부호와 관계없이 성립한다.

검산

- 모두 같은 경우: 모든 $a_i = c$이면 $S = nc^2$이고 $P = \binom{n}{2}c^2 = \frac{1}{2}n(n-1)c^2$이므로 $(n-1)S = n(n-1)c^2 = 2P$이며, (v)에서는 양변이 모두 n^2c^2이다. 두 부등식 모두 예상대로 등호가 성립한다.
- (iii)의 수치 검산: $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, -3, 5)$이면 $S = 39$, $P = -7$이므로 $3S = 117 \geq -14 = 2P$이다. 또 (v)에서는 $(\sum a_i)^2 = 25 \geq \frac{8}{3}(-7) = -\frac{56}{3}$이다. (또한 $S + 2P = 39 - 14 = 25$로 예상과 일치한다.)
- 항등식 $D = (n-1)S - 2P$와 두 부등식을 유리수 연산으로 정확하게, 길이가 2에서 9인 무작위 목록 20 000개와 등호 조건에 매우 가깝게 몰려 있는 목록들에 대해서도 검사하였다. 반례는 나타나지 않았다.

흔한 실수

- 잘못 세기: $\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2)$에서 각 a_k^2는 n번도, $\binom{n}{2}$번도 아닌 $n-1$번 나타난다.
- $(\sum a_i)^2 = S + P$라고 쓰기: 전개식에서 각 교차항은 두 번 나타난다.
- $n - 1 > 0$임을 언급하지 않고 (iv)를 $n-1$로 나누거나, 등호 조건을 밝히는 것을 잊는 경우.

STEP 너머

$D = (n-1)S - 2P$는 평균으로부터의 편차의 제곱의 합의 n배, 즉 $n\sum(a_i - \bar{a})^2$이므로, (iv)는 사실 분산(variance)이 음이 아니라는 명제이다. 소문항 (v)는 코시–슈바르츠 부등식(Cauchy–Schwarz inequality) $(\sum a_i \cdot 1)^2 \leq n\sum a_i^2$이 모습을 바꾼 것으로 읽을 수도 있다. 선형대수학에서 이는 이차형식(quadratic form) $(n-1)S - 2P$가 양의 준정부호(positive semi-definite)이고, 모든 성분이 1인 벡터가 그 핵(kernel)을 생성한다는 명제이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이차형식과 양의 정부호성을 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 형식의 부등식 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.