풀이

STEP III 1993, 문제 8

순수수학 • 3차원 공간의 평면과 직선

STEP III 1993, 8번 문제

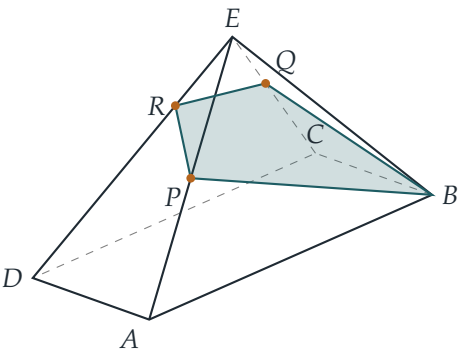
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q8

핵심 아이디어

각 옆모서리는 밑면의 꼭짓점과 E를 잇기 때문에, 옆모서리 위의 모든 점은 간단한 매개변수 표현(parametric form)으로 나타낼 수 있다. 따라서 P, Q, R를 한꺼번에 적을 수 있고, B, P, Q를 지나는 평면(plane)은 이 점들을 대입하여 계수를 정하는 일차방정식(linear equation)으로 구할 수 있다. 두 번째 부분에서 평행사변형(parallelogram)인지 판정하는 가장 깔끔한 방법은 두 대각선(diagonal)이 서로를 이등분(bisect)하는지 보는 것이다. 좌표 하나만 보아도 이것이 성립하지 않음을 보일 수 있다.

풀이



γ 구하기

모서리 AE 위에서는 $x+z=a$이므로, 이 모서리는 $0 \le t \le 1$인 점 $(ta, 0, (1-t)a)$들로 이루어진다. 마찬가지로 CE는 $\{(-ta, 0, (1-t)a)\}$이고 DE는 $\{(0, -ta, (1-t)a)\}$이다. 따라

서

$$P = (\lambda a,\, 0,\, (1-\lambda)a), \qquad Q = (-\mu a,\, 0,\, (1-\mu)a), \qquad R = (0,\, -\gamma a,\, (1-\gamma)a).$$

평면 BPQ를 다음 꼴로 찾는다.

$$px + qy + rz = a.$$

세 점 B, P, Q는 한 직선 위에 있지 않으므로(non-collinear) 평면을 하나로 결정한다. 세 조건을 모두 만족하는 p, q, r를 찾을 수 있다면, 그 방정식이 바로 구하는 평면이다. 각 점을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B: &\quad qa = a, && \text{따라서} q = 1,\\ P: &\quad p\lambda + r(1-\lambda) = 1,\\ Q: &\quad -p\mu + r(1-\mu) = 1. \end{aligned}$$

p를 소거하기 위해 P에 대한 식에 μ를, Q에 대한 식에 λ를 곱하여 더하면

$$r(\mu - \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu) = \lambda + \mu, \qquad \text{따라서} \qquad r = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}.$$

분모는 $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$이므로 문제없다. (뒤에서 쓰지는 않지만, $p = (\lambda - \mu)/(\lambda+\mu-2\lambda\mu)$이다.)

이제 R가 이 평면 위에 있으므로

$$-\gamma + r(1-\gamma) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(1+r) = r - 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \frac{r-1}{r+1}.$$

모두 공통분모 $\lambda+\mu-2\lambda\mu$로 나타내면

$$r - 1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}, \qquad r + 1 = \frac{2(\lambda+\mu-\lambda\mu)}{\lambda+\mu-2\lambda\mu},$$

이고, 따라서

$$\gamma = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu},$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

$0 < \gamma < 1$이라는 점에 주목할 만하다. 즉 R는 실제로 모서리 DE 위에서 D와 E 사이(양 끝점 제외)에 놓인다. 양수라는 것은 분명하다. $\gamma < 1$인 것은 분모가 분자보다 $\lambda+\mu-2\lambda\mu = \lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$만큼 크기 때문이다.

$BPRQ$는 평행사변형이 아니다

생각해 보기 주어진 순서로 놓인 네 점이 평행사변형을 이루는지 판정하는 가장 빠른 방법은 무엇인가?

사각형 $BPRQ$가 평행사변형일 필요충분조건은 두 대각선 BR와 PQ가 서로를 이등분하는 것, 즉 다음이 성립하는 것이다.

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}.$$

(이는 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QR}$, 즉 한 쌍의 대변이 길이가 같고 평행하다는 것과 같다.) 양변의 y좌표를 비교하면

$$\text{좌변: } a-\gamma a=(1-\gamma)a, \qquad \text{우변: } 0+0=0.$$

이 둘이 같아야 하므로 $\gamma=1$이어야 한다. 그러나 앞에서 $\gamma<1$임을 보였다. 실제로 $\gamma=1$이면 R가 E에 놓이게 된다. 따라서 두 대각선은 결코 서로를 이등분하지 않으며, $BPRQ$는 평행사변형일 수 없다. ■

빠짐없이 덧붙이자면, 평면이 네 옆모서리를 EB, EA, ED, EC의 순환 순서로 자르므로, 사각형의 꼭짓점은 실제로 B, P, R, Q 순서로 놓인다. 점을 다르게 짝지어도 소용없다. $B+P=Q+R$와 $B+Q=P+R$는 모두 y좌표에서 $a=-\gamma a$를 요구하는데, $\gamma>0$이므로 이는 불가능하다.

같은 사실을 기하적으로 볼 수도 있다. BP는 면 ABE 위에 있고 QR는 면 CDE 위에 있다. 이 두 면은 E를 지나고 AB에 평행한 직선에서 만난다. 이 두 평면 위에 각각 놓인 두 평행한 직선은 그 공통 직선에 평행해야 한다. 따라서 $BP \parallel QR$이면 $BP \parallel AB$이어야 하는데, $P \neq A$이므로 이는 불가능하다.

검산

- 대칭인 경우 $\lambda=\mu$: 공식에서 $\gamma=\lambda/(2-\lambda)$를 얻는다. $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$이면 이 값은 $\frac{1}{3}$이다. 직접 계산하면 $p=0, r=2$이고 평면은 $y+2z=a$이며, 이 평면은 DE와 $(0,-\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$에서 만나므로 예측과 일치한다.
- 극한 $\lambda,\mu\to 1$: $P\to A, Q\to C$이고 평면은 밑면이 되며, $\gamma\to 1$이므로 마땅히 $R\to D$이다.
- 깔끔하게 다시 쓰면 $\dfrac{1-\gamma}{\gamma}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}+\dfrac{1-\mu}{\mu}$이고, 이는 수치로 확인하기 쉽다. 예를 들어 $\lambda=\frac{1}{2}, \mu=\frac{2}{5}$이면 $\gamma=\frac{2}{7}\approx 0.2857$이다.
- 무작위로 고른 2000개의 a,λ,μ에 대해 공식, $0<\gamma<1$, 그리고 평행사변형에 관한 주장을 (분수로) 정확히 확인했다. 이때 R는 외적(cross product)으로 구한 평면의 법선(normal)을 이용하여 독립적으로 구했다.

흔한 실수

- AE를 잘못 매개화하는 것: AE 위에서 좌표는 $x + z = a$와 $y = 0$을 만족하므로, P의 z좌표는 $(1 - \lambda)a$이지 λa가 아니다.
- 2차원 그림에서 기울기만으로 $BP \parallel QR$인지 확인하는 것. 이 사각형은 기울어진 평면 위에 있으므로 3차원 벡터로 다루어야 한다.
- $\gamma < 1$을 보이는 것을 잊는 것. 이것이 바로 평행사변형 논증에 필요한 사실이다.

STEP 너머

평면이 직선과 만나는 점을 찾는 것은 연립일차방정식(linear system)을 푸는 가장 간단한 경우이다. $EP : PA = (1 - \lambda) : \lambda$이고 다른 모서리에서도 마찬가지이므로, 이 결과는 다음을 말해 준다.

$$\frac{ER}{RD} = \frac{EP}{PA} + \frac{EQ}{QC},$$

이는 B를 지나는 임의의 평면에 대한, 좌표와 무관한 명제이다. 직선 위의 비만 사용하므로, 이 결과는 밑면이 평행사변형인 모든 각뿔에서 성립한다. 아핀 사상(affine map)이 그러한 각뿔을 모두 이 각뿔로 옮기기 때문이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 평면, 법선, 연립일차방정식을 제대로 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.