풀이

STEP III 1993, 문제 7

순수수학 • 쌍곡선 함수 연립방정식

> **STEP III 1993, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q7

핵심 아이디어

두 배각 sinh를 모두 전개한다. 그러면 두 번째 방정식에서 $\cosh x$가 y로 바로 표현되고, 첫 번째 방정식을 이것으로 나누면 $\sinh x$도 y로 표현된다. 항등식 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$을 쓰면 x가 완전히 소거되어 $\sinh^2 y$만의 방정식이 남는다. 그다음은 삼차방정식의 올바른 근을 찾아 수치적으로 정확히 구하는 일이다.

풀이

x 소거하기

$\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u$를 이용하면 두 방정식은

$$2\sinh x \cosh x = \cosh y, \qquad 2\sinh y \cosh y = 2\cosh x.$$

가 된다. 두 번째 식에서

$$\cosh x = \sinh y \cosh y.$$

를 얻는다. $\cosh x \geq 1 > 0$이므로 첫 번째 방정식을 $2\cosh x$로 나눌 수 있다.

$$\sinh x = \frac{\cosh y}{2\sinh y \cosh y} = \frac{1}{2\sinh y},$$

여기서 $\cosh y > 0$이므로 $\cosh y$로 나누어도 되고, $\sinh y \cosh y = \cosh x \neq 0$이므로 $\sinh y \neq 0$이다.

이제 두 식을 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$에 대입한다. $t = \sinh^2 y$로 놓으면 $\cosh^2 y = 1 + t$이므로

$$t(1+t) - \frac{1}{4t} = 1.$$

이다. 양변에 $4t$(0이 아니다)를 곱하면 $4t^2 + 4t^3 - 1 = 4t$, 즉

$$4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

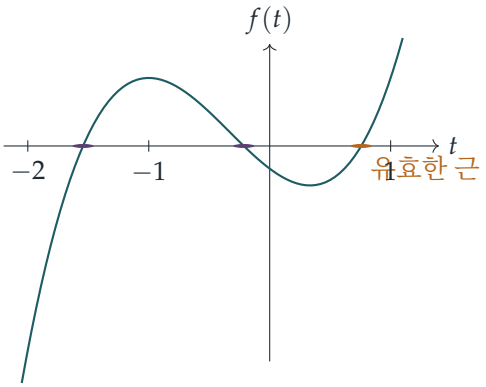
이므로 $t = \sinh^2 y$는 주어진 삼차방정식의 근이다. 이로써 요구된 결과가 증명된다.

유효한 해는 많아야 하나

$f(t) = 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1$이라 하자. $t = \sinh^2 y$이고 $\sinh y \neq 0$이므로 유효한 근은 $t > 0$을 만족해야 한다. 이제

$$f(-2) = -9, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 3,$$

이므로 사잇값 정리(intermediate value theorem)에 의해 삼차방정식은 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$에 각각 근을 하나씩 가진다. 삼차방정식의 근은 많아야 세 개이므로 이것이 전부이고, 양의 근은 정확히 하나이다.



생각해 보기 양수 t 하나는 두 값 $\sinh y = \pm\sqrt{t}$를 준다. 왜 그중 하나만 살아남는가?

$\cosh x = \sinh y \cosh y$이고 $\cosh x > 0$, $\cosh y > 0$이므로 $\sinh y > 0$이어야 한다. 따라서 $\sinh y = +\sqrt{t}$이고, sinh는 순증가하므로 이로부터 정확히 하나의 y, 곧 $y > 0$인 값이 정해진다. 그러므로 삼차방정식에서 얻는 유효한 y는 많아야 하나이다(그리고 sinh는 일대일(one-to-one)이므로 $\sinh x = 1/(2\sinh y)$에 의해 x도 유일하게 정해진다).

t의 위치 찾기와 계산

$$f(0.7) = 1.372 + 1.96 - 2.8 - 1 = -0.468 < 0,$$
$$f(0.8) = 2.048 + 2.56 - 3.2 - 1 = 0.408 > 0,$$

이므로 사잇값 정리에 의해 양의 근은 0.7과 0.8 사이에 있다.

중점 $t_0 = 0.75$에서 출발하여 뉴턴-랩슨(Newton–Raphson) 반복법

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad f'(t) = 12t^2 + 8t - 4,$$

을 사용한다. $f(0.75) = -0.0625$, $f'(0.75) = 8.75$이므로

$$t_1 = 0.75 + \frac{0.0625}{8.75} = 0.7571429,$$
$$t_2 = 0.7570685,$$
$$t_3 = 0.75706846,$$

이고, t_4는 표시된 모든 자릿수에서 t_3와 일치한다. 소수점 아래 여섯째 자리까지 확정하기 위해 부호 변화

$$f(0.7570680) < 0 < f(0.7570690),$$

를 확인한다. 따라서 근은 이 구간에 있고

$$t = 0.757068 \quad (\text{소수점 아래 6자리}).$$

이다. (더 느리지만 충분히 쓸 만한 다른 방법도 있다. $t^2(4t+4) = 4t+1$, 즉 $t = \sqrt{(4t+1)/(4t+4)}$로 변형하는 것이다. 근 근처에서 우변의 도함수는 약 0.16이므로 이 반복은 수렴하며, 한 단계마다 소수 한 자리보다 조금 적게 정확도가 늘어난다.)

y와 x 구하기

양의 제곱근을 택하면 $\sinh y = \sqrt{0.7570685} = 0.870097$이므로

$$y = \operatorname{arsinh}(0.870097) = \ln(0.870097 + \sqrt{1.757068}) = 0.786474,$$

이고

$$\sinh x = \frac{1}{2\sinh y} = 0.574649, \qquad x = \ln(0.574649 + \sqrt{1.330221}) = 0.546965.$$

이다.

원래 방정식에 대입하여 확인하면

$$\sinh 2x = 1.325545 = \cosh y,$$
$$\sinh 2y = 2.306704 = 2\cosh x,$$

이므로 두 방정식이 모두 성립한다. 소수점 아래 넷째 자리까지 나타내면

$$x = 0.5470, \qquad y = 0.7865.$$

이다.

검산

- 삼차방정식의 나머지 두 근은 약 -0.2140과 -1.5431로, 논증에서 요구한 대로 둘 다 음수이다. 세 근의 곱은 $\frac{1}{4}$이며, 이는 $0.757068 \times 0.2140 \times 1.5431 \approx 0.250$과 일치한다.
- $y \in [-5, 5]$에서 두 번째 방정식으로부터 $x = \pm \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2}\sinh 2y)$를 구하고 첫 번째 방정식을 검사하는 직접적인 수치 탐색을 해 보면, $y \approx 0.7865$이고 $x > 0$인 해 하나만 나온다.
- 음수 쪽 선택 $\sinh y = -\sqrt{t}$는 $\sinh y \cosh y < 0$이 되게 하므로 결코 $\cosh x$와 같을 수 없다. 이것이 정말 유효하지 않다는 것을 빠르게 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 일찍 제곱해 놓고(예를 들어 원래 두 방정식을 모두 제곱하고) 맞지 않는 부호를 버리는 것을 잊는 것.
- 두 반복값이 소수점 아래 여섯째 자리까지 일치하자마자 반올림 구간에서의 부호 변화를 확인하지 않고 반복을 멈추는 것.
- 제곱근과 로그를 취하기 전에 t를 여섯째 자리로 반올림하는 것. 여분의 자릿수를 유지하고 최종 x와 y만 반올림해야 한다.

STEP 너머

여기서 쓴 두 반복법은 수렴 속도가 매우 다르다. 고정점 반복(fixed-point iteration) $t \mapsto g(t)$는 선형으로 수렴하여 한 단계마다 오차가 약 $|g'(\text{근})|$배로 줄어드는 반면, 뉴턴-랩슨 방법은 이차로 수렴하여 한 단계마다 정확한 자릿수가 대략 두 배가 된다. 이를 엄밀하게 하려면 평균값 정리(mean value theorem)와 테일러 정리(Taylor's theorem)를 사용하며, 이것이 수치해석(numerical analysis)의 출발점이다. 그 배경이 되는 해석학에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 이해)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.