풀이

STEP III 1993, 문제 6

순수수학 • 복소평면 위의 자취

> **STEP III 1993, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q6

핵심 아이디어

원은 $|z-k|=r$로 나타내는 것이 자연스럽다. 이 식을 $|u|^2=uu^*$를 이용해 제곱하면 제곱근 없이 z와 z^*로 이루어진 방정식이 된다. 자취(locus)를 이런 꼴로 써 두면 $w=z/(z-1)$ 같은 뫼비우스(Möbius) 사상은 쉽게 다룰 수 있다. 사상을 거꾸로 풀어 z를 w에 관한 식으로 나타내고, 대입한 뒤 분모를 없애고, 일반형과 비교하여 새로운 중심과 반지름을 읽어 내면 된다.

풀이

원의 방정식

P가 원 위에 있을 필요충분조건은 K로부터의 거리가 r인 것, 즉 $|z-k|=r$이다. 양변을 제곱하고 $|u|^2=uu^*$와 $(z-k)^*=z^*-k^*$를 이용하면

$$r^2=(z-k)(z^*-k^*)=zz^*-kz^*-k^*z+kk^*,$$

이므로 $zz^*-kz^*-k^*z+kk^*-r^2=0$이고, 이것이 보이려던 식이다.

역으로, 임의의 방정식 $ww^*-cw^*-c^*w+cc^*-s^2=0$ (단, $s>0$)은 $|w-c|^2=s^2$를 뜻하므로, 중심이 c이고 반지름이 s인 원이다. 아래에서는 이 사실을 이용해 원을 알아본다.

P의 자취

OA를 지름(diameter)으로 하는 원은 중심이 i(0과 $2i$의 중점)이고 반지름이 1이다. $k=i$, $k^*=-i$, $kk^*=1$, $r=1$로 두면 첫 번째 부분에 의해

$$zz^*+iz-iz^*=0. \qquad (*)$$

Q_1의 자취 L

$z = 1$은 원 위에 있지 않으므로(i로부터의 거리가 $\sqrt{2}$이다), 모든 P에 대해 $w_1 = z/(z-1)$이 정의된다. 편의상 w로 w_1을 나타내자. $w(z-1) = z$를 z에 대해 풀면

$$z = \frac{w}{w-1}, \qquad z^* = \frac{w^*}{w^*-1},$$

이고, $w \neq 1$이다. $w = 1$이려면 $z = z - 1$이어야 하기 때문이다. $(*)$에 대입하면

$$\frac{ww^*}{(w-1)(w^*-1)} + \frac{iw}{w-1} - \frac{iw^*}{w^*-1} = 0.$$

0이 아닌 $(w-1)(w^*-1)$을 양변에 곱하면

$$\begin{aligned} 0 &= ww^* + iw(w^*-1) - iw^*(w-1) \\ &= ww^* + iww^* - iw - iww^* + iw^* \\ &= ww^* - iw + iw^*. \end{aligned}$$

따라서 L의 방정식은

$$w_1 w_1^* - iw_1 + iw_1^* = 0.$$

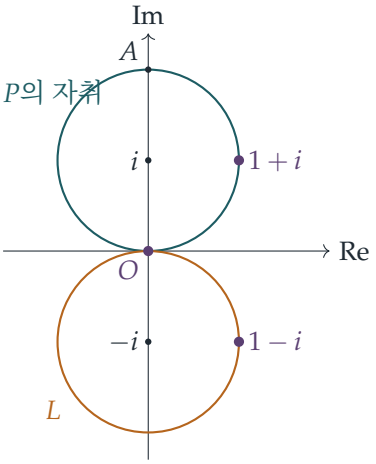
이것이 무엇인지 알아보기 위해 일반형과 비교하자. $-k^* = -i$이고 $-k = i$이어야 하므로 $k = -i$이다. 그러면 $kk^* = 1$이고, 상수항 $kk^* - r^2$이 0이므로 $r = 1$이다. 따라서 L은 중심이 $-i$이고 반지름이 1인 원, 즉 $|w_1 + i| = 1$이다. 이 원은 P의 원을 실수축에 대해 반사(reflection)한 것이며, 역시 원점을 지난다.

? **생각해 보기** 이 원의 모든 점에 실제로 도달하는가, 아니면 일부에만 도달하는가?

위의 모든 단계는 거꾸로 되짚을 수 있다. $w \neq 1$이 $|w+i| = 1$ 위에 있으면 $z = w/(w-1)$은 $(*)$를 만족하므로, 이는 원 위의 점 P로서 $w_1 = w$를 만족한다. 놓칠 수 있는 유일한 점은 $w = 1$인데, 이 점은 L 위에 있지 않다. $|1+i| = \sqrt{2}$이기 때문이다. 따라서 자취는 원 전체이다.

Q_2의 자취

$|z-i| = 1$의 켤레(conjugate)를 취하면, $|u^*| = |u|$이고 $(z-i)^* = z^* + i$이므로 $|z^* + i| = 1$을 얻는다. 따라서 $w_2 = z^*$는 $|w_2 + i| = 1$을 만족한다. z가 i를 중심으로 하는 원 전체를 움직이면, z^*는 $-i$를 중심으로 하는 원 전체를 움직인다. 같은 이야기를 달리 하면, $(*)$의 켤레를 취하면 $z^*z - iz^* + iz = 0$을 얻는데, 이는 $w = z^*$로 둔 L의 방정식이다. 따라서 Q_2의 자취도 L이다.



Q_1과 Q_2가 일치할 때

$\dfrac{z}{z-1} = z^*$, 즉

$$z = zz^* - z^*.$$

이어야 한다. 원 위에서는 $(*)$에 의해 $zz^* = iz^* - iz$이다. 이를 대입하면

$$z = iz^* - iz - z^* \quad \Longrightarrow \quad (1+i)z = (i-1)z^*.$$

한 해는 $z = 0$이다. 그렇지 않으면 $z^* \neq 0$이고

$$\frac{z}{z^*} = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

$z = \rho e^{i\theta}$ (단, $\rho > 0$)로 쓰면 이는 $e^{2i\theta} = i$를 뜻하므로 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5\pi}{4}$이다. 즉 P는 직선 $y = x$ 위에 있다. 이 직선은 원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$, 즉 $x^2 + y^2 = 2y$와 $2x^2 = 2x$인 곳, 곧 $x = 0$ 또는 $x = 1$에서 만난다. O이 아닌 점은 $z = 1 + i$이다.

두 점을 모두 확인하자. $z = 0$이면 $w_1 = 0 = z^*$이고, $z = 1 + i$이면

$$w_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i = z^*.$$

따라서 Q_1과 Q_2가 일치하는 것은 정확히 P가 원점이거나 점 $1 + i$일 때이다. 이 두 점은 $y = x$가 원과 만나는 점이며, $Q_1 = Q_2$의 공통 위치는 0과 $1 - i$이다.

검산

- 표본 점: $P = 2i$(점 A)이면 $w_1 = \frac{2i}{2i-1} = \frac{4-2i}{5}$이고, $|w_1 + i| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$이므로 이 점은 L 위에 있다.

- 수치적으로, 10^4개의 임의의 점을 $|z-i|=1$ 위에서 택하여 $z/(z-1)$과 z^*가 모두 $|w+i|=1$을 10^{-9} 이내의 오차로 만족함을 확인했다. 원 둘레의 2×10^5개 점을 조사하여 $\left|z/(z-1)-z^*\right|<10^{-3}$인 점을 찾았더니 $z=0$과 $z=1+i$만 나왔다.

흔한 실수

- z^*로 나누면서 $z=0$인 경우를 먼저 따로 떼어 놓지 않아, 해 $P=O$를 잃는 것.
- $z/z^*=i$를 얻고 거기서 멈추는 것: 이는 P의 방향만 정할 뿐이며, 그 직선과 원의 교점을 여전히 구해야 한다.
- $ww^*-iw+iw^*=0$을 일반형에 맞출 때 k의 부호를 틀리는 것. w^*의 계수는 $-k$이므로 $k=-i$이며, i가 아니다.

STEP 너머

사상 $z\mapsto z/(z-1)$은 뫼비우스 변환(Möbius transformation)이며, 이러한 사상은 언제나 원과 직선을 원과 직선으로 보낸다. 여기서는 상(image)인 원이 마침 원래 원의 거울상이며, 그래서 켤레를 취해도 같은 자취가 나온다. 켤레 사상 자체는 방향을 뒤집으므로 뫼비우스 사상이 아니지만, 이를 뫼비우스 사상과 합성하면 "반뫼비우스(anti-Möbius)" 사상을 얻으며, 여기에는 원에 대한 반사(reflection in a circle)가 포함된다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 뫼비우스 사상, 반전(inversion), 원을 보존하는 성질을 아름다운 기하학적 방식으로 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.