풀이

STEP III 1993, 문제 4

순수수학 • 급수의 합

STEP III 1993, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q4

핵심 아이디어

각 급수(series)는 모두 익숙한 급수가 모습을 바꾼 것이다. 급수의 합을 구하는 일반적인 방법은 그 급수를 표준적인 전개(expansion), 즉 로그(logarithm), 등비급수(geometric series) 또는 그 도함수(derivative)의 전개를 특정한 점에서 계산한 것으로 알아보거나, 일반항을 쪼개어 합이 연쇄적으로 소거되게(telescoping) 만드는 것이다. 따라서 각 소문항마다 이 급수가 어떤 표준 급수일 수 있는지, 그리고 그 꼴로 만들려면 무엇을 곱하거나 미분하거나 재배열해야 하는지를 묻는다.

풀이

소문항 (i)

홀수 분모 $1, 3, 5, \ldots$를 보면 홀수 차수만 남은 로그 급수가 떠오른다. $|x| < 1$일 때

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3} - \cdots,$$

이고, 두 식을 빼면 짝수 차수가 사라진다.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

주어진 급수는 $x = \frac{1}{2}$일 때의 $\sum x^{2n}/(2n+1)$이다. 차수가 짝수이므로 x로 나눈다($x \neq 0$이므로 가능하다).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$x = \frac{1}{2}$는 수렴구간(interval of convergence) 안에 있고, 이때 $\frac{1+x}{1-x} = \frac{3/2}{1/2} = 3$, $\frac{1}{2x} = 1$이므로

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = \ln 3.$$

이다.

소문항 (ii)

계수는 주기 4로 반복된다. 즉 $x^{4k}, x^{4k+1}, x^{4k+2}, x^{4k+3}$의 계수는 각각 $2, -1, 0, -1$이다. 따라서 네 항씩 묶으면

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}(2 - x - x^3) = \frac{2 - x - x^3}{1 - x^4},$$

이 되는데, 이는 공비가 x^4인 등비급수이고 $|x^4| < 1$이므로 수렴한다. 원래 급수는 $|x| < 1$에서 절대수렴(absolute convergence)하므로 이렇게 묶는 것은 정당하다. 각 항의 크기가 $2|x|^m$으로 유계이기 때문이다.

이제 식을 간단히 한다. 분자는 $x = 1$에서 0이 되므로 $1 - x$를 인수로 가진다.

$$2 - x - x^3 = (1 - x)(x^2 + x + 2), \qquad 1 - x^4 = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

$1 - x$를 약분하면($|x| < 1$이므로 0이 아니다)

$$\frac{x^2 + x + 2}{(1 + x)(1 + x^2)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}.$$

이다. $x = -1$을 대입하면 $2 = 2A$이므로 $A = 1$이다. 그러면 $x^2 + x + 2 - (1 + x^2) = x + 1 = (Bx + C)(1 + x)$이므로 $B = 0, C = 1$이다. 따라서

$$2 - x - x^3 + 2x^4 - \cdots = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

이다. 이는 쉽게 확인할 수 있다. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$와 $1 - x^2 + x^4 - \cdots$를 더하면 계수가 $2, -1, 0, -1, 2, \ldots$가 되어 원하는 결과와 같다.

소문항 (iii)

일반항을 다음과 같이 쓴다.

$$\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}\, r \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}.$$

? **생각해 보기** $\sum r y^{r-1}$을 어디에서 본 적이 있는가?

이것은 등비급수의 도함수이다. $|y| < 1$일 때 $\sum_{r=0}^{\infty} y^r = \frac{1}{1-y}$를 항별로 미분하면(수렴구간 안에서는 가능하다)

$$\sum_{r=1}^{\infty} r y^{r-1} = \frac{1}{(1 - y)^2}.$$

을 얻는다. $y = \frac{2}{3}$이면 이 값은 $\frac{1}{(1/3)^2} = 9$이다. 주어진 합은 $r = 2$부터 시작하므로 $r = 1$일 때의 항인 1을 뺀다.

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}(9-1) = 4.$$

소문항 (iv)

$r(r^2-1) = (r-1)r(r+1)$은 연속한 세 정수의 곱이므로, 연속한 두 "쌍" 분수의 차를 찾아본다.

$$\frac{1}{(r-1)r} - \frac{1}{r(r+1)} = \frac{(r+1)-(r-1)}{(r-1)r(r+1)} = \frac{2}{r(r^2-1)}.$$

따라서 합은 연쇄적으로 소거된다. $r = 2$부터 N까지 더하면 처음 항과 마지막 항을 제외한 모든 항이 소거된다.

$$\sum_{r=2}^{N} \frac{2}{r(r^2-1)} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{N(N+1)}.$$

$N \to \infty$일 때 마지막 항은 0으로 수렴하므로

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{2}{r(r^2-1)} = \frac{1}{2}.$$

이다.

검산

- (i): 처음 네 항을 더하면 $1 + 0.0833 + 0.0125 + 0.0022 \approx 1.098$로, 이미 $\ln 3 \approx 1.0986$에 가깝다.
- (ii): $x = 0$에서 양변은 모두 2이다. $x = \frac{1}{2}$에서 닫힌 꼴은 $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$이고, 이는 부분합(partial sum)의 수치와 일치한다.
- (iii): 처음 몇 항은 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{16}{27}, \ldots$ 이고, 부분합은 천천히 4를 향해 증가한다.
- (iv): $N = 4$까지의 부분합은 $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{9}{20} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}$으로, 공식과 일치한다.

흔한 실수

- (i)에서 x로 나누는 것을 잊는 경우: $x = \frac{1}{2}$에서 $\sum x^{2n+1}/(2n+1)$의 값은 $\ln 3$이 아니라 $\frac{1}{2}\ln 3$이다.
- (iii)에서 $r = 1$부터 더하고 빠진 첫째 항을 빼는 것을 잊는 경우: 그러면 $\frac{9}{2}$가 나온다.
- (iv)에서 대신 $\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1}$로 소거하려는 경우: 이것은 $\frac{2}{r(r^2-1)}$이 아니라 $\frac{2}{r^2-1}$을 쪼갠 것이다.

STEP 너머

우리가 별다른 고민 없이 밟은 단계들, 즉 (ii)에서 항을 다시 묶은 것과 (iii)에서 거듭제곱급수(power series)를 항별로 미분한 것은 바로 첫 해석학(analysis) 강의에서 정당화하는 내용이다. 거듭제곱급수는 수렴반지름(radius of convergence) 안에서 절대수렴하며 항별로 미분할 수 있다. 그러나 조건수렴(conditional convergence)만 하는 급수를 재배열하면 합이 달라질 수 있다(리만(Riemann)의 재배열 정리(rearrangement theorem)). Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이 두 가지를 모두 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.