풀이

STEP III 1993, 문제 3

순수수학 • 행렬의 LU 분해

STEP III 1993, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q3

핵심 아이디어

M을 하삼각행렬(lower-triangular matrix)과 상삼각행렬(upper-triangular matrix)의 곱으로 나타내면(이를 *LU* 분해(*LU decomposition*)라 한다) 모든 문제가 미지수가 하나뿐인 방정식들의 연쇄로 바뀐다. **AB**를 전개한 다음 성분을 적절한 순서로 비교하면, 새로 나오는 방정식마다 미지수가 하나만 들어 있으므로 값과 그 유일성(uniqueness)을 한꺼번에 얻는다. 또한 삼각행렬은 역행렬(inverse)을 구하기 쉽고, $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$는 풀기 쉬운 두 개의 삼각 연립방정식으로 나뉜다.

먼저 주의할 점. 시험지에는 $e = 1$로 인쇄되어 있지만 이는 오식이고, 올바른 값은 $e = -1$이다. $e = 1$이면 **AB**의 맨 아래 행은 $(3, 8, 7)$이 아니라 $(3, 10, 1)$이 된다. 아래에서는 모두 $e = -1$을 사용한다.

풀이

A와 B 구하기

전개하면

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & ap & aq \\ b & bp + c & bq + cr \\ d & dp + e & dq + er + f \end{pmatrix}.$$

이것을 **M**과 같다고 놓고, 각 방정식에 미지수가 하나만 남도록 다음 순서로 성분을 비교한다.

- $(1,1)$ 성분: $a = 1$.
- $(1,2)$, $(1,3)$ 성분: $ap = 3$, $aq = 2$이므로 ($a = 1$이므로) $p = 3$, $q = 2$.

- $(2,1)$, $(3,1)$ 성분: $b = 4$, $d = 3$.
- $(2,2)$ 성분: $bp + c = 13$이므로 $c = 13 - 12 = 1$.
- $(2,3)$ 성분: $bq + cr = 5$이므로 ($c = 1$을 이용하면) $8 + r = 5$이고 $r = -3$.
- $(3,2)$ 성분: $dp + e = 8$이므로 $9 + e = 8$이고 $e = -1$.
- $(3,3)$ 성분: $dq + er + f = 7$이므로 $6 + 3 + f = 7$이고 $f = -2$.

각 미지수는 나머지가 모두 이미 알려진 방정식에 의해 **강제로** 결정되었고, 나눗셈은 0이 아닌 $a = 1$과 $c = 1$로만 했다. 따라서 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$이면 미지수들은 반드시 이 값을 가져야 한다. 역으로 이 값들은 아홉 개의 방정식을 모두 만족한다. 그러므로 해가 존재하고 유일하다.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

이때 $a = 1, b = 4, c = 1, d = 3, e = -1, f = -2, p = 3, q = 2, r = -3$이다.

? **생각해 보기** 유일성은 어디에서 오는가? 우리는 해를 하나 찾았을 뿐이다.

유일성은 추론의 **순서**에서 나온다. 어느 단계에서도 선택을 한 적이 없다. 각 방정식은 계수가 0이 아닌 새 미지수 하나에 대한 일차방정식이었으므로 해가 정확히 하나였다. 따라서 주어진 꼴이면서 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$을 만족하는 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$는 반드시 위의 쌍이어야 한다. ($\mathbf{B}$의 대각선에 있는 1이 중요하다. 이것이 없으면 $\mathbf{A}$를 몇 배 키우고 $\mathbf{B}$를 그만큼 줄일 수 있다.)

역행렬

$\mathbf{A}$의 역행렬을 구하기 위해 $\mathbf{Au} = \mathbf{v}$를 위에서부터 차례로 푼다.

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - 4u_1 = -4v_1 + v_2, \\ -2u_3 &= v_3 - 3u_1 + u_2 = -7v_1 + v_2 + v_3 \implies u_3 = \tfrac{1}{2}(7v_1 - v_2 - v_3). \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$의 역행렬을 구하기 위해 $\mathbf{Bw} = \mathbf{u}$를 아래에서부터 차례로 푼다.

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3, \\ w_2 &= u_2 + 3w_3 = u_2 + 3u_3, \\ w_1 &= u_1 - 3w_2 - 2w_3 = u_1 - 3u_2 - 11u_3. \end{aligned}$$

계수를 읽어 내면

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

곱을 계산해 보면 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$임을 확인할 수 있다. 하삼각(상삼각)행렬의 역행렬은 다시 하삼각(상삼각)행렬이라는 점에 주목하자.

연립방정식

주어진 방정식은 $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{v} = (7, 18, 25)^{\mathrm{T}}$에 대하여 $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{v}$라는 뜻이다. $\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{B}$이므로

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

순서에 주의하라: $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. 먼저

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -28 + 18 \\ \frac{1}{2}(49 - 18 - 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

이고, 그다음

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 + 30 - 33 \\ -10 + 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

따라서 유일한 해는

$$x = 4, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

$\mathbf{M}$이 가역(invertible)이므로 해는 유일하다: $\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (1 \cdot 1 \cdot (-2))(1) = -2 \neq 0$.

검산

다시 대입하면 $4 - 3 + 6 = 7$, $16 - 13 + 15 = 18$, $12 - 8 + 21 = 25$이다. 세 방정식이 모두 성립한다. 또한 정확한 분수 계산으로 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{M}$임과 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$이 실제로 $\mathbf{M}^{-1}$임도 확인했다. 그 맨 아래 행은 $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$이다. 인쇄된 값 $e = 1$을 쓰면 곱 $\mathbf{A}\mathbf{B}$의 맨 아래 행이 $(3, 10, 1)$이 되므로 오식임이 확인된다.

흔한 실수

- 인쇄된 $e = 1$을 그대로 믿고 $(3, 2)$, $(3, 3)$ 성분을 억지로 맞추는 것. 구한 $\mathbf{A}$와 $\mathbf{B}$를 항상 다시 곱해 보라.
- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 대신 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$을 사용하는 것.
- 값이 성립함만 보이고 다른 값은 불가능하다는 논증을 하지 않는 것.

STEP 너머

이것이 바로 *LU* **분해**이며, 컴퓨터가 실제로 연립일차방정식을 푸는 방법이다. 가우스 소거법(Gaussian elimination)은 사실 $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$로 인수분해하는 과정이다. 일단 분해하고 나면, 우변이 새로 주어질 때마다 전진 대입(forward substitution)과 후진 대입(back substitution)만 하면 되고 소거를 처음부터 다시 할 필요가 없다. 일반적으로는 먼저 행 교환이 필요할 수 있으며, 이때 $\mathbf{PM} = \mathbf{LU}$가 된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 이 아이디어를 중심으로 한 장 전체를 구성한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.