풀이

STEP III 1993, 문제 2

순수수학 • 변곡점과 극좌표 넓이

STEP III 1993, 2번 문제

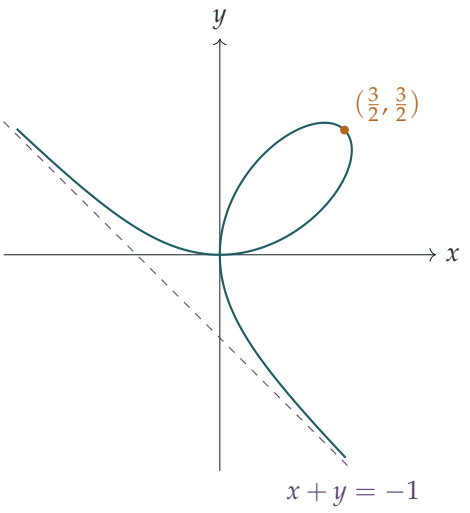
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q2

핵심 아이디어

변곡점(point of inflection)에서는 이계도함수(second derivative)가 0이 되어야 하고 (또한 부호가 바뀌어야 하고), 따라서 (i)의 계획은 음함수 미분(implicit differentiation)으로 $\frac{d^2y}{dx^2}$를 구한 다음 이것이 언제 0이 될 수 있는지 살펴보는 것이다. 계산은 복잡해 보이지만, 곡선의 방정식 자체가 분자를 아주 간단한 식으로 줄여 준다. (ii)에서는 삼차항들과 xy항의 차수가 서로 다르므로, 극좌표(polar coordinates)에서 인수 r^2이 약분되어 r이 θ의 명시적인 함수로 나타난다.

풀이



그림은 이 곡선(데카르트의 엽선(folium of Descartes))을 보여 준다. 제1사분면에 고리가 하나 있고, 제2사분면과 제4사분면에 있는 두 가지는 점근선(asymptote) $x+y=-1$에 가까워진다.

소문항 (i)

$x^3+y^3=3xy$를 x에 대하여 음함수 미분하면

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{N}{D}, \quad N=y-x^2,\ D=y^2-x,$$

이고, 이는 $D\neq 0$인 모든 곳에서 성립한다. 이 몫을 미분하고, $y'=N/D$와 함께 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=y'-2x$, $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2yy'-1$을 이용하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y'-2x)D-N(2yy'-1)}{D^2}=\frac{(N-2xD)-(2yN^2/D-N)}{D^2}\\&=\frac{2(ND-xD^2-yN^2)}{D^3}.\end{aligned}$$

이제 괄호 안을 전개한다.

$$\begin{aligned}ND&=x^3+y^3-x^2y^2-xy,\\xD^2&=xy^4-2x^2y^2+x^3,\\yN^2&=y^3-2x^2y^2+x^4y,\end{aligned}$$

따라서

$$ND-xD^2-yN^2=3x^2y^2-xy-xy^4-x^4y=-xy\left(1+x^3+y^3-3xy\right).$$

C 위에서는 $x^3+y^3-3xy=0$이므로 괄호는 그냥 1이 되고

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

> **생각해 보기** 이것이 0이 될 수 있는 곳은 어디인가? 그리고 이 공식이 성립하지 않는 점들은 어떻게 되는가?

이계도함수는 $x=0$ 또는 $y=0$일 때만 0이 된다. C 위에서 $x=0$이면 $y^3=0$이고, $y=0$이면 $x^3=0$이다. 어느 경우든 원점에 있게 되는데, 원점은 변곡점이 아니라고 가정해도 된다. 원점과 $y^2=x$인 점들을 제외하면 이계도함수는 연속이고 0이 아니므로 부호가 바뀔 수 없다. 따라서 그곳에는 변곡점이 없다.

남은 것은 $D=y^2-x=0$인 점들로, 이곳에서는 y가 x에 대하여 미분가능한 함수가 아니다. 만약 그곳에서 N도 0이라면 $x=y^2$이고 $y=x^2$이므로 $x=x^4$이 되어 $(0,0)$ 또는

$(1,1)$을 얻는다. 그런데 $1+1 \neq 3$이므로 $(1,1)$은 C 위에 있지 않다. 따라서 원점이 아닌 그러한 모든 점에서 $N \neq 0$이다. 즉 접선이 수직이므로 x를 y의 함수로 다루어야 한다. C의 방정식은 x와 y에 대하여 대칭이므로, 위의 계산에서 두 문자의 역할을 바꾸면

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{-2xy}{(x^2-y)^3},$$

을 얻고, 이는 정의되며 ($x^2 - y = -N \neq 0$이므로) 0이 아니다 (원점이 아닌 곳에서 $xy \neq 0$이므로). 따라서 이 점들에서도 곡선의 휘는 방향은 바뀌지 않는다.

그러므로 C에는 변곡점이 없다.

소문항 (ii)

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$로 놓는다. 그러면

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta,$$

이고, $r \neq 0$이면 r^2으로 나눌 수 있다.

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$에서 분자와 분모는 모두 음이 아니므로 (그리고 분모는 양수이므로) $r \geq 0$이며, $r = 0$인 것은 정확히 $\theta = 0$과 $\theta = \frac{\pi}{2}$일 때이다. 따라서 θ가 0부터 $\frac{\pi}{2}$까지 변할 때 점은 원점에서 출발하여 고리를 한 바퀴 돌고 원점에서 끝난다. 넓이는

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

분자와 분모를 $\cos^6\theta$ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$에서 양수)로 나누면

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$u = \tan\theta, \mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$로 치환하면 u는 0부터 ∞까지 변하고

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(1+u^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

$u \to \infty$일 때 부정적분이 0으로 가므로 이 이상적분(improper integral)은 수렴한다. 따라서 고리의 넓이는 $\frac{3}{2}$이다.

검산

- 고리의 끝은 $y = x$인 곳이다. $2x^3 = 3x^2$에서 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$를 얻고, 이 점은 원점에서 $\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$만큼 떨어져 있다. 이 정도 길이에 폭이 대략 1인 고리라면 넓이는 1에서 2 정도여야 하므로 결과와 잘 맞는다.

- 매개변수 표시(parametrisation) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ (직선 $y = tx$가 C와 만나는 점)을 이용하여, 임의의 점들에서 $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$를 매개변수로 구한 이계도함수와 비교하였고, 어느 가지에서도 곡률이 부호를 바꾸지 않음을 확인하였다.
- $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$의 중점 수치적분과 매개변수로 나타낸 고리를 따라 계산한 신발끈 공식(shoelace) 합이 모두 1.500000을 준다.

흔한 실수

- 이계도함수를 완전히 전개하고도 그 안에 $x^3 + y^3 - 3xy$가 나타난다는 것을 끝내 알아차리지 못하는 것. 이 간단히 하기가 핵심이다.
- $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$가 0이 아니라 정의되지 않는, 수직 접선을 갖는 점들을 잊는 것.
- 넓이를 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 대신 $\frac{1}{2}\int r\,\mathrm{d}\theta$로 쓰는 것.

STEP 너머

음함수 미분은 음함수 정리(implicit function theorem)로 정당화된다. $\partial F/\partial y \neq 0$인 점 근처에서는 방정식 $F(x,y) = 0$이 실제로 y를 x의 매끄러운 함수로 정의한다. 두 편도함수가 모두 0이 되는 원점은 두 가지가 교차하는 특이점(singular point)이며, 그래서 따로 다루어야 했던 것이다. 엽선은 또한 유리곡선(rational curve)으로서, 이중점을 지나는 직선 $y = tx$로 매개변수 표시되는데, 이 아이디어는 대수기하학(algebraic geometry)으로 이어진다. 이 모든 것의 바탕이 되는 해석학에 대해서는 Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.