풀이

STEP III 1993, 문제 14

역학 • 연직 원운동

STEP III 1993, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

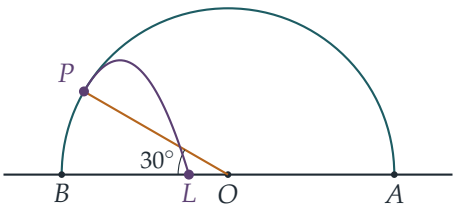
step.maths.org/questions/93-s3-q14

핵심 아이디어

실이 수평이고 입자를 연직 방향으로 쏘아 올리므로, 처음 속도는 실에 수직이다. 따라서 입자는 O를 중심으로 하는 반지름 c인 연직 원 위를 움직이고, A의 지름 반대편 점 B에 떨어진다. 매번 충돌(impact)할 때 속도는 연직 방향이므로, 충돌은 단순히 속력을 절반으로 줄인다. 입자가 더 이상 원의 꼭대기를 넘어가지 못하게 되는 첫 번째 튀어 오름을 찾고, 에너지와 지름 방향(radial) 운동 방정식을 이용해 장력(tension)이 0이 되는 위치를 구하면 된다. 그 이후는 평범한 포물체(projectile) 운동이다.

풀이

입자는 질량 m인 질점으로, 실은 가볍고 늘어나지 않는 것으로, 탁자는 매끄럽고 수평인 것으로 모형화한다. O를 원점으로 잡고 $A = (c, 0)$, $B = (-c, 0)$이라 하자. 입자가 올라가고 있는 쪽의 수평 반지름에서 위로 잰 각을 θ라 하자.



충돌 사이의 운동

입자가 A 또는 B에서 속력 V로 연직 위쪽으로 움직이며 탁자를 떠난다고 하자. 속도는 팽팽한 실에 수직이므로, 실이 팽팽하게 유지되는 동안 입자는 O를 중심으로 하는 반지름 c인

원 위를 움직인다. 에너지 보존(conservation of energy)에 의해 각 θ에서의 속력 v는 다음을 만족한다.

$$v^2 = V^2 - 2gc\sin\theta.$$

장력을 T라 하고 O를 향하는 방향으로 힘을 분해하면

$$T + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{T}{m} = \frac{V^2}{c} - 3g\sin\theta.$$

$0 \le \theta \le 90^\circ$에서 장력은 꼭대기에서 가장 작으므로, 실이 반원 전체에 걸쳐 팽팽하게 유지될 필요충분조건은 $V^2 \ge 3gc$이다. (꼭대기를 지나면 $\sin\theta$가 다시 감소하므로 T는 커지기만 한다.) 이 경우 에너지에 의해 입자는 지름의 반대쪽 끝에서 다시 속력 V로 연직 아래쪽으로 움직이며 탁자에 떨어진다.

그 충돌에서 속도는 탁자에 수직이므로, 튀어 오르는 운동은 속력 $\frac{1}{2}V$의 연직 운동이고 실은 여전히 수평이며 팽팽하다. 따라서 V가 절반이 된 채로 전체 과정이 되풀이된다.

실이 느슨해지는 위치

입자는 $V_0 = 64\sqrt{6gc}$로 출발하므로 $V_0^2 = 24576\,gc$이다. k번 충돌한 뒤의 속력은 $V_k = V_0/2^k$이므로

$$V_k^2 = \frac{24576}{4^k}\,gc: \qquad V_6^2 = 6gc, \qquad V_7^2 = \tfrac{3}{2}gc.$$

따라서 속력 $V_0, \ldots, V_6$으로 시작하는 반원은 모두 완성되고(각각 $V_k^2 \ge 3gc$), 충돌은 B, A, B, A, B, A, B에서 일어난다. 일곱 번째 충돌은 B에서 일어나며, 입자는 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc < 3gc$로 B에서 올라간다.

> **생각해 보기** 실이 먼저 느슨해지는 것이 아니라, 실이 느슨해지기 전에 입자가 다시 떨어질 수도 있을까?

그렇지 않다. 속력은 $V_7^2 = 2gc\sin\theta$, 즉 $\sin\theta = \frac{3}{4}$인 곳에서 0이 되지만, 장력은 그보다 먼저 다음 조건을 만족하는 곳에서 0이 된다.

$$\frac{V_7^2}{c} = 3g\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{2}gc = 3gc\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}.$$

따라서 실은 B 쪽의 점 P에서 $\theta = 30^\circ$일 때, 즉 탁자로부터 높이 $c\sin\theta = c/2$인 곳에서 느슨해지며, 이는 문제에서 요구한 결과이다.

A와 B 사이에서의 첫 번째 튀어 오름

P에서 $\theta = 30^\circ$이므로 $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \frac{1}{2}c\right)$이고

$$v^2 = \tfrac{3}{2}gc - 2gc\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}gc.$$

속도는 접선 방향, 즉 OP에 수직이며 위쪽이면서 O를 향하는 방향이다. 이 속도는 수평과 60°를 이룬다. 따라서 성분은

$$v_x = \tfrac{1}{2}v, \qquad v_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad \text{이때} v_x^2 = \tfrac{1}{8}gc, \quad v_y^2 = \tfrac{3}{8}gc.$$

이제부터 입자는 포물체이다. 입자는 $\frac{1}{2}c + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$일 때 탁자에 닿으며, 양의 근을 택하면

$$t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + gc}}{g} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

이 시간 동안의 수평 변위는

$$v_x t = \sqrt{\frac{gc}{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}\,c,$$

이므로, 입자는 다음을 만족하는 점 L에 떨어진다.

$$x_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}c = \frac{\sqrt{11}-3\sqrt{3}}{8}\,c \approx -0.235\,c.$$

(이 비행 내내 입자는 O로부터 거리 c 이내에 있으므로, L에 닿기 전에 실이 다시 팽팽해지지 않는다. 특히 $|x_L| < c$이다.)

$\sqrt{11} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$이므로 $x_L < 0$이다. 즉 떨어지는 점은 O에 대해 B와 같은 쪽에 있다. O가 AB의 중점이므로, A와 B 사이에서의 첫 번째 튀어 오름은 **B에 더 가깝고**, B로부터 약 $0.77c$, A로부터 약 $1.23c$ 떨어져 있다.

검산

- 판정 조건 $V_k^2 \geq 3gc$에 따르면 처음으로 완성되지 않는 반원은 $k = 7$일 때이고, $V_7^2 = \frac{3}{2}gc$이다. 실이 느슨해지는 조건에서 $\sin\theta = \frac{1}{2}$를 얻는다.
- P에서 중력의 지름 방향 성분 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$는 $v^2/c = \frac{1}{2}g$와 같으며, 이는 장력이 0이 되기 위한 조건과 정확히 일치한다.
- 수치적 단계별 시뮬레이션($g = 9.8$, $c = 1.3$)으로 확인한 결과, 실은 높이 $0.5000c$에서 느슨해지고, 떨어지는 점은 $x \approx -0.2349c$이며, 비행하는 동안 O로부터의 거리는 c를 넘지 않았다.

흔한 실수

- 반원을 완성하기 위한 조건으로 $V^2 \geq 4gc$(꼭대기에 겨우 도달하는 조건)를 쓰는 것. 막대와 달리 실은 $V^2 \geq 3gc$가 필요하다.

- 일곱 번째 충돌이 어느 쪽 끝에서 일어나는지 놓치는 것. 홀수 번째 충돌은 B에서 일어난다.
- P에서의 속도 방향을 잘못 잡는 것. 속도는 OP에 수직이며 수평과 $30°$가 아니라 $60°$를 이룬다.

STEP 너머

실이 느슨해지는 순간은 구속 조건(constraint)이 꺼지는 순간이다. 장력은 $|OP| = c$를 강제하는 라그랑주(Lagrange) 승수(Lagrange multiplier)이며, 장력이 음수가 되어야 하는 상황에서는 구속 조건이 더 이상 작용하지 않는다. 이와 같은 한쪽 방향 구속 조건이나 충돌이 있는 문제는 대학 학부 역학에서 체계적으로 다룬다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 에너지와 지름 방향 운동 방정식을 이런 방식으로 함께 사용하는 모습을 살펴보기에 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.