풀이

# STEP III 1993, 문제 13

역학 • 질량이 변하는 사슬

> **STEP III 1993, 13번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q13

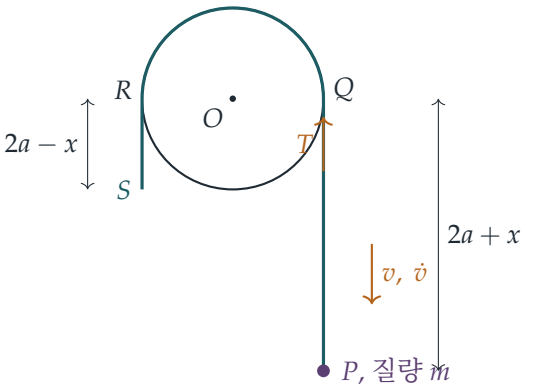
## 핵심 아이디어

사슬이 미끄러지지 않으므로 원판, 사슬 전체, 입자는 모두 같은 속력으로 움직인다. 따라서 미지수는 $v$ 하나뿐이다. 그러면 운동 에너지(kinetic energy)는 $\frac{1}{2}$(유효 질량)$v^2$의 꼴이 된다. 위치 에너지(potential energy)에서는 매달린 두 부분만 변한다. 꼭대기를 감싼 호 부분은 똑같은 사슬로 계속 바뀌어 채워질 뿐이기 때문이다. 장력(tension)을 구할 때는 움직이는 부분 $PQ$와 입자를 함께 묶어서 본다. 그런 다음 $Q$에서 여기에 새로 합류하는 사슬이 이미 얼마나 빠르게 움직이고 있는지 곰곰이 생각해 본다.

## 풀이

### 모형

원판은 $O$를 지나는 매끄러운 고정축을 중심으로 회전하는 균일한 박판(lamina)이고, 관성 모멘트(moment of inertia)는 $\frac{1}{2}(4m)a^2 = 2ma^2$이다. 사슬은 단위 길이당 질량이 $m/a$인 균일한 사슬로, 늘어나지 않으며(inextensible) 테두리에서 미끄러지지 않는다. 입자는 질점이다. $P$가 $x$만큼 내려갔을 때 오른쪽 부분 $QP$의 길이는 $2a + x$, 왼쪽 부분 $RS$의 길이는 $2a - x$이고, 호 $RQ$는 길이가 $\pi a$인 반원이다. 사슬의 모든 점은 속력 $v$로 움직이고, 미끄러짐이 없으므로 테두리도 같은 속력으로 움직인다. 따라서 원판의 각속력(angular speed)은 $\omega = v/a$이다.




**속력**

운동 에너지. 원판의 몫은 $\frac{1}{2}(2ma^2)(v/a)^2 = mv^2$, 사슬의 몫은 $\frac{1}{2}(4+\pi)mv^2$, 입자의 몫은 $\frac{1}{2}mv^2$이다. 따라서

$$\mathrm{KE} = \tfrac{1}{2}mv^2(2+4+\pi+1) = \tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2.$$

위치 에너지. 호 $RQ$는 언제나 같은 반원 모양의 사슬이므로 그 위치 에너지는 변하지 않는다. $O$의 높이를 기준(0)으로 잡자. 그 아래로 매달린 길이 $\ell$인 부분은 질량이 $m\ell/a$이고 질량 중심(centre of mass)이 깊이 $\frac{1}{2}\ell$에 있으므로, 위치 에너지는 $-\dfrac{mg\ell^2}{2a}$이다. 따라서 매달린 두 부분의 위치 에너지 감소량은

$$\frac{mg}{2a}\left[(2a+x)^2+(2a-x)^2-(2a)^2-(2a)^2\right] = \frac{mg}{2a}\cdot 2x^2 = \frac{mgx^2}{a}.$$

입자는 $mgx$만큼 잃는다.

에너지. 축은 매끄럽고, 미끄러짐이 없으므로 거친 접촉면은 일을 하지 않는다. 따라서 에너지가 보존(conservation of energy)되고, 정지 상태에서 출발하므로

$$\tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2 = \frac{mgx^2}{a} + mgx \quad\Longrightarrow\quad (\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

**가속도**

시간에 대해 미분하고 $\dot{x} = v$를 이용하면

$$2(\pi+7)av\dot{v} = 2g(2x+a)v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = \frac{g(2x+a)}{(\pi+7)a} \qquad (v \neq 0).$$

$S$는 $x = 2a$일 때 $R$에 도달하고, 이때

$$\dot{v} = \frac{5g}{\pi+7}, \qquad v^2 = \frac{2g(4a^2+2a^2)}{(\pi+7)a} = \frac{12ga}{\pi+7}.$$

### $Q$에서의 장력

$Q$에서의 장력을 $T$라 하자. 우리가 볼 계는 입자와 $Q$ 아래로 매달린 사슬을 합친 것이다. 이 계의 질량은

$$M = \frac{m}{a}(2a + x) + m,$$

이고, 사슬이 원판에서 풀려 나오면서 $\dot{M} = \frac{m}{a}v$의 비율로 증가한다. 이 계에 작용하는 외력은 아래쪽으로 작용하는 무게 $Mg$와 위쪽으로 작용하는 $T$이다. 계 전체가 속력 $v$로 아래쪽으로 움직인다.

> **생각해 보기** $PQ$에 합류하는 사슬은 합류하기 직전에 얼마나 빠르게 움직이고 있는가?

$Q$에서 테두리는 연직이므로, 그곳에 도착하는 사슬은 이미 연직 아래쪽으로 속력 $v$로 움직이고 있다. 이 사슬은 자신의 운동량(momentum) $v\,\delta M$을 함께 가지고 들어온다. 그러면 가변 질량(variable mass) 방정식(운동량의 변화율 = 힘 + 단위 시간당 들어오는 운동량)은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T + v\dot{M}, \qquad \text{즉,} \qquad M\dot{v} = Mg - T.$$

$S$가 $R$에 도달할 때 $M = 5m$이므로

$$T = 5m\left(g - \frac{5g}{\pi + 7}\right) = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}\,mg.$$

**모멘트(*moments*)를 이용한 교차 검증.** 원판과 사슬의 호 $RQ$를 함께 묶어서 보자. 축이 주는 힘은 $O$를 지나고, 호의 무게는 $O$에 대한 전체 모멘트가 0이며(호는 $O$를 지나는 연직선에 대해 대칭이다), 사슬과 원판 사이의 마찰은 내력이다. 호의 모든 입자는 $O$로부터 거리 $a$에서 속력 $v$로 움직인다. 따라서 각운동량(angular momentum)은 $(2ma^2 + \pi ma^2)(v/a)$이고,

$$(T - T_R)a = (2 + \pi)ma\,\dot{v}.$$

$S$가 $R$에 도달하면 왼쪽 부분은 길이가 0으로 줄어들었으므로 $T_R = 0$이다. 그러면 다시 $T = (2 + \pi)m \cdot \frac{5g}{\pi + 7} = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$를 얻는다.

**인쇄된 답.** 시험지의 값 $\frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg$는 $PQ$에 합류하는 사슬이 정지 상태에서 들어오는 것처럼 취급하여 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T$로 쓸 때 얻는 값과 정확히 같다.

$$T = M(g - \dot{v}) - \frac{m}{a}v^2 = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg - \frac{12}{\pi + 7}mg = \frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg.$$

이는 정지한 안개를 흡수하는 빗방울에는 맞는 방정식이다. 그러나 여기서는 맞지 않는다. 테두리를 돌아 나오는 사슬은 이미 $PQ$와 함께 움직이고 있기 때문이다. 우리의 두 방법 모두 $\frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$로 일치하므로, 인쇄된 답에 이 오류가 들어 있다고 본다. 인쇄된 값이 필요

하다면 "정지 상태에서 합류" 방정식을 쓰되, 이 방정식이 $T$를 $mv^2/a$만큼 작게 계산한다는 점을 알고 있어야 한다.

## 검산

- $x = 0$에서 공식은 $v = 0, \dot{v} = g/(\pi + 7)$을 준다. 불균형한 힘은 입자의 무게 $mg$뿐이고, 이것이 유효 질량(effective mass) $(\pi + 7)m$에 작용한다.
- 운동 방정식 $(\pi + 7)m\dot{v} = mg(2x + a)/a$를 정지 상태에서부터 수치적으로 단계별 계산하면 $(\pi + 7)av^2 = 2g(x^2 + ax)$가 $10^{-11}$ 이내의 오차로 재현된다. $m = a = 1, g = 9.81$로 두면 운동량 방법과 모멘트 방법이 모두 $T/mg \approx 2.5349 = 5(\pi + 2)/(\pi + 7)$을 준다. "정지 상태에서 합류" 방식은 $1.3517 = (5\pi - 2)/(\pi + 7)$을 준다.
- 매달린 질량 $5m$이 아래쪽으로 가속되고 있으므로, 당연히 $T < 5mg$이다.

## 흔한 실수

- 원판의 운동 에너지를 빠뜨리거나, 원판의 관성 모멘트로 $\frac{1}{2}(4m)a^2$ 대신 $ma^2$를 쓰는 것.
- 사슬의 호 부분을 위치 에너지 변화에 포함하는 것. 호의 모양과 위치는 결코 변하지 않는다.
- 들어오는 질량이 이미 어떤 속도를 가지고 있었는지 따져 보지 않고 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = F$를 쓰는 것.

## STEP 너머

가변 질량 문제의 본질은 계를 선택하고, 그 경계를 넘나드는 운동량을 빠짐없이 추적하는 데 있다. 이것이 검사 부피(control volume)라는 개념이며, 로켓 운동과 유체역학(fluid mechanics)의 상당 부분이 이 개념에 바탕을 둔다. 여기서 흔히 저지르는 오류, 즉 질량이 변하는 어떤 경우에도 $F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$가 성립한다고 가정하는 것은 유명한 함정이다. 일반적으로 이 방정식은 기준틀(frame of reference)에 무관하지조차 않다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 가변 질량계를 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.