풀이

STEP III 1993, 문제 12

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP III 1993, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

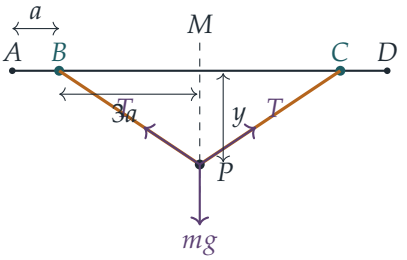
step.maths.org/questions/93-s3-q12

핵심 아이디어

못이 매끄럽고 입자가 줄의 중점에 놓여 있으므로, 줄은 똑같은 두 반쪽으로 나뉜다. 각 반쪽의 자연 길이(natural length)는 a이고, 각 반쪽의 모든 곳에서 장력(tension)이 같다. 각 반쪽은 고정된 끝점에서 출발하여 못을 지나 P까지 아래로(또는 위로) 이어지므로, 늘어난 상태의 길이는 거리 BP에만 의존한다. 늘어난 길이(extension)를 P의 높이로 나타내고 나면, 평형(equilibrium) 조건에서 k를 얻고 에너지 보존(conservation of energy)이 Q와 R를 연결해 준다.

풀이

P를 입자로, 줄을 가볍고 탄성이 있는 것으로, 못을 매끄러운 것으로 모형화한다. 대칭성에 의해 P는 BC의 중점 M을 지나는 연직선 위에서 움직인다. M 아래로 P까지의 깊이를 y라 하자. 이 값은 P가 BC보다 위에 있을 때 음수이다.



k 구하기

반쪽 $A \to B \to P$의 길이는 $a + BP = a + \sqrt{9a^2 + y^2}$이고 자연 길이는 a이므로, 늘어난 길이는

$$x = \sqrt{9a^2 + y^2}.$$

이다. 훅의 법칙(Hooke's law)에 의해 각 반쪽의 장력은

$$T = \frac{kmg\,x}{a}.$$

이다. BP가 수평선과 이루는 각을 θ라 하면 $\sin\theta = |y|/x$이다. P에서 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$2T\sin\theta = mg \quad \Longrightarrow \quad 2 \cdot \frac{kmg\,x}{a} \cdot \frac{y}{x} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{2ky}{a} = 1.$$

를 얻는다. 제곱근이 약분되었으므로, 지저분한 값 $BP = \frac{\sqrt{145}}{4}a$는 전혀 필요하지 않다. $y = a/4$를 대입하면 $k/2 = 1$이므로

$$k = 2.$$

이다.

Q에서 R까지의 에너지

각 반쪽에는 탄성 에너지(elastic energy) $\dfrac{kmg\,x^2}{2a}$가 저장되므로, $k = 2$일 때 두 반쪽에 저장된 에너지의 합은

$$E(y) = 2 \cdot \frac{2mg\,x^2}{2a} = \frac{2mg\,(9a^2 + y^2)}{a}.$$

이다.

> **생각해 보기** 왜 P는 R에서 멈추며, P가 못보다 위로 올라가도 괜찮은 이유는 무엇인가?

P는 Q에서 정지 상태로부터 놓이고, R는 입자가 올라가는 가장 높은 점이므로 그곳에서도 순간적으로 정지한다. BC보다 위에서도 두 반쪽은 여전히 늘어나 있으므로(각 반쪽에서 여전히 $x \geq 3a > 0$이다), E에 대한 같은 식이 그대로 성립한다. 줄은 결코 느슨해지지 않는다.

Q에서는 $y = pa$이고, R에서는 $y = -3a$이다. 입자는 $(p+3)a$만큼 올라간다. 못이 매끄럽고 다른 에너지 손실이 없으며, 양 끝에서 운동 에너지(kinetic energy)가 0이므로

$$\begin{aligned} E(pa) &= E(-3a) + mg(p+3)a \\ 2mga(9+p^2) &= 2mga(9+9) + mga(p+3) \\ 18 + 2p^2 &= 36 + p + 3, \end{aligned}$$

이고, 이로부터

$$2p^2 - p - 21 = 0, \qquad \text{즉,} \qquad (2p+6)(p-\tfrac{7}{2}) = 0.$$

을 얻는다. $p > 0$이므로 $p = \frac{7}{2}$이다.

이 결과는 문제에 인쇄된 $2p^2 - p - 17 = 0$과 일치하지 **않는다**. 우리는 직접적인 수치 시뮬레이션을 포함하여 모형을 꼼꼼히 확인하였고(검산 참고), 주어진 조건에서 나오는 값은 -21이다. 깔끔한 근 $p = \frac{7}{2}$를 보면 원래 의도된 상수는 21이고 17은 오식으로 보인다. 마지막 소문항은 어느 상수가 옳은지와 무관하다.

P가 정말로 R에서 처음으로 멈추는지 확인하기 위해 $y = ta$로 놓자. 깊이 ta에서의 운동 에너지는

$$E(pa) - E(ta) - mg(p-t)a = mga\,(p-t)(2p+2t-1).$$

이다. $p = \frac{7}{2}$이면 이 값은 $mga\,(\frac{7}{2} - t)(2t+6)$이다. 이는 $-3 < t < \frac{7}{2}$에서 양수이고 $t = -3$에서 처음으로 0이 되는데, 이 점이 바로 R이다.

장력 비교하기

장력은 $T = 2mg\,x/a$이고 이는 x에 대해 증가하므로, x가 Q에서보다 R에서 더 작음을 보이면 된다. 에너지 방정식을 이용하면 p의 값을 쓰지 않고도 이를 보일 수 있다.

$$E(Q) - E(R) = mg(p+3)a > 0.$$

탄성 에너지는 $\dfrac{2mg\,x^2}{a}$이므로 $x_R^2 < x_Q^2$이고, 따라서 $x_R < x_Q$이며 $T_R < T_Q$이다. 말로 풀어 쓰면, 입자는 올라가는 동안 위치 에너지(potential energy)를 얻는데 그 에너지는 줄에서만 나올 수 있으므로, R에서는 줄이 덜 늘어나 있어야 한다.

구체적으로 $p = \frac{7}{2}$이면 $x_Q = \frac{\sqrt{85}}{2}a$이고 $x_R = 3\sqrt{2}\,a$이므로

$$T_Q = \sqrt{85}\,mg \approx 9.22\,mg, \qquad T_R = 6\sqrt{2}\,mg \approx 8.49\,mg.$$

이다.

검산

- **단진동 검산.** P에 작용하는 위쪽 방향의 힘은 $2T \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{4mg\,y}{a}$이고, 이는 BC의 아래에서뿐 아니라 위에서도 y에 대한 일차식이다. 따라서 P는 $y = a/4$(앞에서 구한 평형 위치)를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 한다. $y = \frac{7}{2}a$에서 정지 상태로부터 놓이면 진폭(amplitude)은 $\frac{13}{4}a$이므로, 최고점은 $y = \frac{1}{4}a - \frac{13}{4}a = -3a$이다. 이는 정확히 R이며, $p = \frac{7}{2}$임을 독립적으로 확인해 준다.

- $a = 1, k = 2, p = 3.5$로 운동 방정식을 수치 적분하면 최고점은 $y = -3.0000$이다.
- 인쇄된 방정식을 따르면 $p = \frac{1+\sqrt{137}}{4} \approx 3.18$이 되는데, 이때 에너지 균형은 $4mga$만큼 어긋난다.

흔한 실수

- 각 반쪽의 길이를 계산할 때 선분 AB를 빠뜨리는 것. 반쪽의 길이는 $AB + BP = a + BP$이며, 늘어난 길이가 BP가 되는 것은 오직 AB가 자연 길이 a와 같기 때문이다.
- 줄 전체를 장력이 $kmg \cdot (\text{전체 늘어난 길이})/(2a)$인 하나의 용수철로 취급하는 것. 이렇게 해도 같은 답이 나오지만, 늘어난 길이를 **전체** 늘어난 길이 $2x$로 잡을 때만 그렇다.
- P가 BC보다 위에 있을 때에도 탄성 에너지가 여전히 존재한다는 것을 잊는 것. 그곳에서도 줄은 여전히 늘어나 있다.

STEP 너머

줄의 기하학적 구조는 비선형인데도, 연직 방향의 복원력(restoring force)은 변위에 정확히 비례하였다. 이는 길이에 비례하는 장력의 연직 성분이 연직 방향의 거리에 비례하기 때문인데, 자연 길이가 0인 용수철이 이상적인 현가장치가 되는 것도 같은 이유이다(이것이 LaCoste 장주기 지진계(seismometer)의 원리이다). 좌표에 대한 이차식인 위치 에너지는 선형 운동 방정식으로 이어지며, 이것이 미소 진동(small oscillations)과 정규 모드(normal modes) 이론의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 용수철, 에너지, 진동을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.