풀이

STEP III 1993, 문제 11

역학 • 짝힘과 관성모멘트

> **STEP III 1993, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q11

핵심 아이디어

정육면체에 좌표를 붙이고 모든 힘을 벡터로 나타낸다. 여섯 힘의 합은 영이므로, 이 힘들이 하는 일은 **짝힘**(*couple*)을 가하는 것뿐이며, 짝힘의 모멘트(moment)는 모든 점에 대하여 같다. 그러면 소문항 (i)은 그 모멘트의 방향에 관한 문제가 된다. 소문항 (ii)는 그 모멘트의 OO' 방향 성분만을 사용하며, 여기에 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 막대 하나하나씩 쌓아 올려 구한 관성 모멘트(moment of inertia)를 함께 쓴다.

풀이

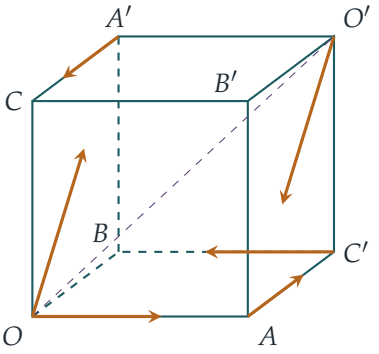
틀은 가늘고 균일한 막대로 이루어진 강체(rigid body)이고, 중력은 없다고 모형화한다. O를 원점으로 하고 OA, OB, OC 방향의 단위벡터를 잡으면

$$A = (a, 0, 0), \quad B = (0, a, 0), \quad C = (0, 0, a),$$

이고, 맞은편 꼭짓점들은

$$O' = (a, a, a), \quad A' = (0, a, a), \quad B' = (a, 0, a), \quad C' = (a, a, 0).$$

이다.



호박색 화살표는 여섯 개의 작용선(line of action)을 나타내고, 대각선 OO'은 자두색 점선으로 그려져 있다.

소문항 (i)

각 힘은 그 크기에 작용선 방향의 단위벡터를 곱한 것이다. 예를 들어 $O'A$는 길이가 $\sqrt{2}\,a$인 벡터 $(0,-a,-a)$이므로, 이를 따라 작용하는 크기 $\sqrt{2}\,mg$의 힘은 $mg(0,-1,-1)$이다. 여섯 힘 모두에 대해 같은 방법으로 구하면 다음과 같다.

작용선	작용선 위의 점	힘
OA	O	$mg(2,0,0)$
AC'	A	$mg(0,1,0)$
$O'A$	A	$mg(0,-1,-1)$
OA'	O	$mg(0,1,1)$
$C'B$	B	$mg(-2,0,0)$
$A'C$	C	$mg(0,-1,0)$

힘들의 합은 $\mathbf{0}$이다. 합력(resultant)이 영인 힘의 계는 하나의 짝힘과 동등하며, 그 모멘트는 모든 점에 대하여 같다. O에 대한 모멘트를 구하면 (OA와 OA'을 따라 작용하는 힘은 O를 지나므로 기여하지 않는다)

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= A\times mg(0,1,0) + A\times mg(0,-1,-1) + B\times mg(-2,0,0) + C\times mg(0,-1,0)\\ &= amg[(0,0,1)+(0,1,-1)+(0,0,2)+(1,0,0)]\\ &= amg\,(1,1,2).\end{aligned}$$

이다. O의 회전축 받침은 틀을 밀 수 있지만, 그 힘은 O를 지나 작용하므로 O에 대한 모멘트가 없다. 따라서 정지 상태에서 출발한 틀은 O를 지나고 짝힘의 축 방향인 직선을 중심으로

돌기 시작하며, 그 방향은

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

궁금한 독자를 위한 덧붙임. 이것이 문제가 의도한 답이며, 답안에도 이렇게 써야 한다. 그러나 엄밀히 말하면, 3차원에서 자유롭게 돌 수 있는 물체의 각가속도(angular acceleration)는 $\mathbf{I}^{-1}\mathbf{G}$이다. 여기서 $\mathbf{I}$는 O에 대한 관성 **텐서**(*tensor*)이다. 이 벡터는 $\mathbf{G}$가 주축(principal axis) 위에 놓일 때에만 $\mathbf{G}$와 같은 방향을 향한다. 이 틀의 경우, O에 대하여 관성 모멘트는 OO'을 축으로 할 때 $14ma^2/3$이고 (소문항 (ii)에서 구한다), O를 지나고 OO'에 수직인 모든 축에 대하여 $41ma^2/3$이다. 그러면 처음 회전축의 방향은 $(25, 25, 32)$가 되며, 이는 $(1, 1, 2)$와 약 12.6° 차이가 난다.

소문항 (ii)

OO' 방향의 단위벡터를 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$이라 하자. $\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$는 $\mathbf{p}$의 직선 방향 성분이므로, 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 점 $\mathbf{p}$와 직선 OO' 사이의 거리의 제곱은

$$d^2 = |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2$$

이다.

막대 OA. O로부터 거리 x인 점은 $(x,0,0)$이므로 $d^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$이다. 길이 $\mathrm{d}x$인 미소 부분의 질량은 $\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$이므로

$$I_{OA} = \int_0^a \frac{m}{a}\cdot\frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2ma^2}{9}.$$

이다. 중점 $(\frac{a}{2},0,0)$과 OO' 사이의 거리의 제곱은 $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{6}$이다. 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해, 중점을 지나는 평행한 축에 대하여

$$I_{\text{중점}} = \frac{2ma^2}{9} - m\cdot\frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{18}.$$

이다.

막대 $B'C$. 이 막대는 $(a,0,a)$에서 $(0,0,a)$까지 이어지므로 OA와 평행하다. 또한 길이가 같고 축과 이루는 각도 같다. 따라서 자신의 중점을 지나는 평행한 축에 대한 관성 모멘트도 역시 $ma^2/18$이다. 그 중점은 $\mathbf{p} = (\frac{a}{2},0,a)$이고,

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

이다. 평행축 정리에 의해

$$I_{B'C} = \frac{ma^2}{18} + \frac{ma^2}{2} = \frac{5ma^2}{9}.$$

이다.

생각해 보기 열두 개의 막대 모두에 대해 이 계산을 정말 해야 할까?

그렇지 않다. 대칭성이 대신 해 준다. OO'을 축으로 하는 120° 회전($x \to y \to z \to x$로 순환시키는 것)과 정육면체의 중심에 대한 점대칭(point reflection) $\mathbf{p} \mapsto (a,a,a) - \mathbf{p}$는 모두 틀과 직선 OO'을 각각 자기 자신으로 옮긴다. 따라서 이 변환들은 OO'에 대한 관성 모멘트를 바꾸지 않는다. 회전은 OA를 OB와 OC로 옮기고, 점대칭은 이들을 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$으로 옮긴다. 이들이 O 또는 O'에 한 끝이 있는 여섯 막대이며, 각각의 관성 모멘트는 $2ma^2/9$이다. 같은 방법으로 $B'C$는 정육면체의 가운데를 한 바퀴 도는 "지그재그" AB', $B'C$, CA', $A'B$, BC', $C'A$의 나머지 다섯 막대로 옮겨지며, 이들 각각의 관성 모멘트는 $5ma^2/9$이다. 따라서

$$I_{\text{틀}} = 6 \cdot \frac{2ma^2}{9} + 6 \cdot \frac{5ma^2}{9} = \frac{42ma^2}{9} = \frac{14ma^2}{3},$$

이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

각가속도. 이제 틀은 고정된 직선 OO'을 축으로 해서만 돌 수 있다. 축받침이 그 직선에 수직인 방향으로 필요한 짝힘을 모두 공급하므로, 가해진 짝힘 가운데 OO' 방향 성분만이 틀을 돌린다. 힘들은 여전히 짝힘 $\mathbf{G} = amg(1,1,2)$를 이루며, 어떤 직선에 대한 짝힘의 모멘트는 그 직선 방향의 성분이다.

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{u} = \frac{amg(1+1+2)}{\sqrt{3}} = \frac{4amg}{\sqrt{3}}.$$

고정축에 대한 회전의 방정식 $I\ddot{\theta} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$로부터

$$\ddot{\theta} = \frac{4amg/\sqrt{3}}{14ma^2/3} = \frac{12g}{14\sqrt{3}\,a} = \frac{2\sqrt{3}\,g}{7a}.$$

를 얻는다. 회전 방향은 O'에서 O 쪽을 바라볼 때 시계 반대 방향, 즉 $\overrightarrow{OO'}$ 방향에 대한 오른손 방향의 회전이다.

검산

- 여섯 힘은 각각 "짝"이 있다. OA와 $C'B$, AC'과 $A'C$, 그리고 $O'A$와 OA'이다. 각 쌍은 평행한 직선 위에서 크기가 같고 방향이 반대이며, 그래서 합력이 영이 된다.
- 틀은 중심에 대하여 정육면체의 대칭성을 가지므로, 중심을 지나는 모든 축에 대하여 관성 모멘트가 같다. 중심을 지나고 OC에 평행한 축에 대하여, 네 개의 수직 막대는 $4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2$를 기여한다. 여덟 개의 수평 막대는 각각 $\frac{ma^2}{12} + \frac{ma^2}{4} = \frac{ma^2}{3}$을 기여한다. 합은 $\frac{14ma^2}{3}$이며, OO'도 중심을 지나므로 위의 답과 일치한다.
- 수치적으로 $a = m = g = 1$로 두고 열두 막대에 대해 중점 합을 계산하면 $I = 4.66667$, $\ddot{\theta} = 0.494872$를 얻으며, 이는 $2\sqrt{3}/7 \approx 0.494872$와 일치한다.

흔한 실수

- 면대각선 방향의 힘 $\sqrt{2}\,mg$를 성분으로 바꿀 때 인수 $1/\sqrt{2}$를 빠뜨리는 실수. 각 힘의 성분의 크기는 $\sqrt{2}\,mg$가 아니라 mg이다.
- 소문항 (ii)에서 고정축 방향의 성분 대신 짝힘 전체 $|\mathbf{G}| = \sqrt{6}\,amg$를 사용하는 실수.
- 질량중심을 지나지 않는 축에서 출발하여 평행축 정리를 적용하는 실수. $2ma^2/9$에서 $ma^2/18$로 가는 단계에서처럼, 항상 질량중심을 **거쳐서** 옮겨야 한다.

STEP 너머

3차원에서의 회전에서는 관성 모멘트가 3×3 대칭행렬, 즉 관성 텐서가 되며, 각운동량(angular momentum)은 $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$이다. 이 행렬의 고유벡터(eigenvector)가 주축이다. 소문항 (i)의 덧붙임에서 보았듯이, 일반적으로 물체는 가해진 짝힘의 축을 중심으로 돌기 시작하지 않는다. 정육면체 틀은 좋은 예이다. 중심을 지나는 모든 축에 대하여 관성 모멘트가 같지만, 꼭짓점에 대해서는 그렇지 않다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 관성 텐서를 포함하여 3차원 강체 운동을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.