풀이

STEP III 1993, 문제 10

순수수학 • 행렬 변환

STEP III 1993, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

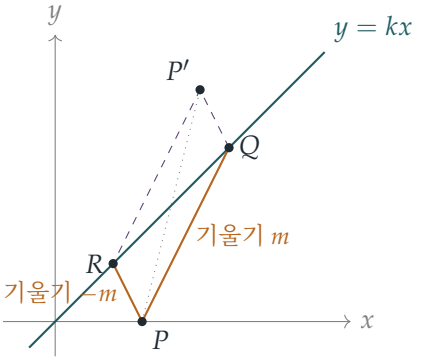
step.maths.org/questions/93-s3-q10

핵심 아이디어

여기서 다루는 것은 모두 두 직선의 교점(intersection)이므로, 좌표는 일차방정식(linear equation)을 하나씩 풀어서 얻는다. 평행사변형(parallelogram)을 이용하면 더 이상의 계산 없이 P'을 얻는다. 평행사변형 $PQP'R$에서 두 대각선(diagonal)은 서로를 이등분하므로, 위치벡터(position vector)로 $P + P' = Q + R$이다. P'을 행렬과 P의 곱으로 나타내고 나면, 넓이에 관한 질문은 행렬식(determinant) 계산일 뿐이다.

풀이

풀이 전체에서 $m^2 \neq k^2$이어야 한다. $m = \pm k$이면 P를 지나는 두 직선 중 하나가 $y = kx$와 평행하여 이 직선과 만나지 않거나 그 위에 놓이므로 작도가 성립하지 않는다.



(그림은 $m = 2, k = 1, P = (1, 0)$인 경우이다.)

점 Q

$P(x_1, y_1)$을 지나고 $y = mx$에 평행한 직선은 $y - y_1 = m(x - x_1)$이다. Q에서는 $y = kx$도 성립하므로

$$kx - y_1 = mx - mx_1 \quad \Longrightarrow \quad (m-k)x = mx_1 - y_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mx_1 - y_1}{m-k},$$

이다. 여기서 $m - k \neq 0$으로 나누었다. 그러면 $y = kx$로부터

$$Q = \left(\frac{mx_1 - y_1}{m-k}, \frac{k(mx_1 - y_1)}{m-k} \right),$$

를 얻으며, 이는 문제에서 요구한 결과이다.

점 R

P를 지나고 $y = -mx$에 평행한 직선에 대해서는 m을 $-m$으로 바꾸어 같은 계산을 하면 된다.

$$x = \frac{-mx_1 - y_1}{-m-k} = \frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \qquad R = \left(\frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \frac{k(mx_1 + y_1)}{m+k} \right).$$

점 P'

> **생각해 보기** 교차하는 직선을 더 그리지 않고 평행사변형의 네 번째 꼭짓점을 어떻게 찾을까?

꼭짓점은 P, Q, P', R의 순서로 돌아가므로 PP'과 QR이 대각선이다. 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 중점이 같다.

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = \tfrac{1}{2}(Q + R) \quad \Longrightarrow \quad P' = Q + R - P.$$

(같은 말로, $\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PR}$이다.) Q와 R은 모두 $y = kx$ 위에 있으므로, 먼저 두 점의 x좌표를 더하는 것이 가장 쉽다. 공통분모 $m^2 - k^2$으로 통분하면

$$\begin{aligned} x_Q + x_R &= \frac{(mx_1 - y_1)(m+k) + (mx_1 + y_1)(m-k)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{(m^2x_1 + mkx_1 - my_1 - ky_1) + (m^2x_1 - mkx_1 + my_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2}, \end{aligned}$$

이고, $y_Q + y_R = k(x_Q + x_R)$이다. 따라서 $P' = (x', y')$이라 하면

$$x' = \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - x_1 = \frac{(m^2 + k^2)x_1 - 2ky_1}{m^2 - k^2},$$

$$y' = \frac{2k(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - y_1 = \frac{2km^2x_1 - (m^2 + k^2)y_1}{m^2 - k^2}.$$

행렬로 나타낸 T

두 좌표 모두 상수항 없이 x_1, y_1에 대해 일차이므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{pmatrix} m^2 + k^2 & -2k \\ 2km^2 & -(m^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

넓이

행렬이 $\mathbf{M}$인 선형사상(linear map)은 모든 넓이를 $|\det \mathbf{M}|$배 한다. 각 행에서 인수 $\frac{1}{m^2-k^2}$을 꺼내면

$$\det \mathbf{M} = \frac{-(m^2+k^2)^2 + 4k^2m^2}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^4 - 2m^2k^2 + k^4)}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^2-k^2)^2}{(m^2-k^2)^2} = -1.$$

따라서 $|\det \mathbf{M}| = 1$이고, 모든 영역은 넓이가 같은 영역으로 옮겨지므로 요구한 결과가 성립한다. 음의 부호는 T가 반사(reflection)처럼 방향(orientation)을 뒤집는다는 것을 알려준다. 즉 시계 반대 방향으로 그린 도형의 상은 시계 방향으로 그려진다.

> **생각해 보기** T가 하는 일을 그림으로 나타낼 수 있을까?

그렇다. PP'의 중점은 QR의 중점과 같고 이 점은 $y = kx$ 위에 있으며, $y = kx$ 위의 점은 고정된다(그곳에서는 $Q = R = P$이다). $\mathbf{Mv} = -\mathbf{v}$를 풀면 행 $2m^2x - 2ky = 0$을 얻으므로, T에 의해 방향이 반대로 되는 벡터는 (k, m^2)의 상수배이다. 따라서 T는 **비스듬한 반사**(*skew reflection*)이다. 즉 직선 $y = kx$에 대한 반사이되, 직선에 수직인 방향이 아니라 (k, m^2) 방향을 따라 반사한다. 다른 모든 반사와 마찬가지로 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$를 만족하며, 이는 작도와도 들어맞는다. P'에서 시작하면 같은 Q와 R을 얻고, 따라서 다시 P로 돌아온다.

검산

- $m = 2, k = 1, P = (1,0)$이면 $Q = (2,2)$, $R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$이므로 $P' = (\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$이다. 행렬은 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$이고, 이 행렬은 $(1,0)$을 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$으로 보내며, 행렬식은 $\frac{1}{9}(-25+16) = -1$이다.
- 직선 위의 점 (t, kt)는 고정되어야 한다. 실제로 $x' = \frac{(m^2+k^2)t - 2k^2t}{m^2-k^2} = t$이다. ✓
- $\mathbf{M}$의 대각합(trace)은 0이고 행렬식은 -1이므로, 고윳값(eigenvalue)은 ± 1이다. 이는 반사에서 기대되는 바와 같다.
- 이 모든 공식과 삼각형 넓이의 보존을, m, k, P를 무작위로 약 3000번 골라 유리수 산술로 정확하게 확인하였다.

흔한 실수

- $Q+R-P$ 대신 $P'=Q+R$ 또는 $P'=P+Q+R$로 놓는 실수. 문자의 순서 $PQP'R$이 어느 꼭짓점끼리 마주 보는지를 알려 준다.
- $\det\mathbf{M}=-1$로부터 넓이가 음수가 된다고 결론짓는 실수. 넓이의 배율은 $|\det\mathbf{M}|$이며, 부호는 방향만을 나타낸다.

STEP 너머

한 직선 위의 점을 모두 고정하고 다른 한 방향을 뒤집는 선형사상은 **대합**(*involution*), 즉 $T^2=I$인 사상이다. 보통의 직교 반사는 뒤집히는 방향이 직선에 수직인 특수한 경우이다. 여기서 그런 일은 (k,m^2)이 $(1,k)$에 수직일 때, 즉 $k=0$일 때에만 일어난다(직선 $y=\pm mx$는 $y=kx$가 아니라 x축에 대해 대칭이다). 대학에서는 이 내용이 고윳값과 대각화(diagonalisation)의 이론 안에 자리 잡는데, 여기서 T는 기저 $(1,k)$, (k,m^2)에 대해 $\mathrm{diag}(1,-1)$로 보인다. 또한 행렬식을 부호가 있는 부피 배율로 보는 관점과도 연결된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 두 개념을 모두 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.