풀이

STEP III 1993, 문제 1

순수수학 • 호의 길이와 부피

STEP III 1993, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s3-q1

핵심 아이디어

배각 공식(double-angle formula) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$를 쓰면 매개변수 곡선(parametric curve)이 곧바로 직교좌표(Cartesian) 방정식으로 바뀌고, θ의 범위를 보면 포물선(parabola)의 어느 부분이 나오는지 정확히 알 수 있다. 길이를 구할 때 $\sqrt{1+16x^2}$는 $1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$이므로 쌍곡선 함수 치환(hyperbolic substitution)을 쓰라는 전형적인 신호이다. 부피는 P의 양 끝이 회전축(axis of rotation) 위에 있다는 것만 알아차리면 평범한 회전체의 부피(volume of revolution) 문제가 된다.

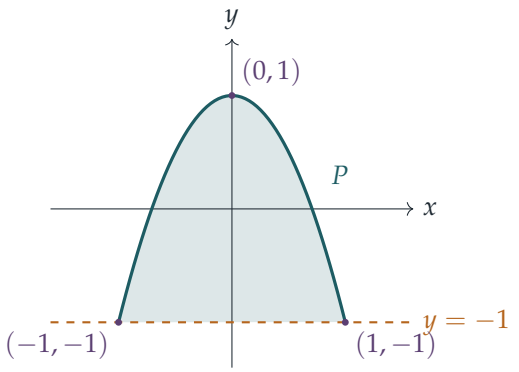
풀이

곡선과 그 개형

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$이고 $x = \sin\theta$이므로

$$y = 1 - 2x^2.$$

따라서 P의 모든 점은 포물선 $y = 1 - 2x^2$ 위에 있다. θ가 $-\pi/2$에서 $\pi/2$까지 움직이면 $x = \sin\theta$는 -1에서 1까지 꾸준히 증가하며 각 값을 정확히 한 번씩 취한다. 따라서 P는 정확히 포물선에서 $-1 \le x \le 1$인 부분의 호이다. 이 호는 $(-1,-1)$에서 꼭짓점(vertex) $(0,1)$까지 올라갔다가 다시 $(1,-1)$까지 내려오며, y축에 대하여 대칭이다.



P의 길이

직교좌표 방정식으로 계산하면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x$이므로

$$\text{길이} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x,$$

이다. 여기서 피적분함수(integrand)가 우함수(even function)라는 사실을 이용하였다. (매개변수 공식 $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\theta$를 써도 $x = \sin\theta$로 치환하면 같은 적분이 나온다.)

> **생각해 보기** 어떤 치환을 하면 $\sqrt{1+16x^2}$가 깔끔하게 정리될까?

$16x^2$이 $\sinh^2$ 꼴이 되기를 원하므로 $4x = \sinh u$로 놓는다. 그러면 $4\,\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$이고 $\sqrt{1+16x^2} = \cosh u$이다($\cosh u > 0$이므로 양수이다). 적분 구간 $x = 0, 1$은 $u = 0$과 $u = \alpha$가 되며, 여기서 $\alpha = \sinh^{-1} 4$이다. $\sinh\alpha = 4$이고 $\cosh\alpha = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$임에 주목하자. $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$를 이용하면

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\alpha \cosh u \cdot \tfrac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int_0^\alpha (1+\cosh 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[u + \tfrac{1}{2}\sinh 2u\Big]_0^\alpha = \tfrac{1}{4}(\alpha + \sinh\alpha\cosh\alpha) \\ &= \tfrac{1}{4}(\sinh^{-1}4 + 4\sqrt{17}). \end{aligned}$$

따라서 P의 길이는 요구한 대로 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4$이다.

부피

P의 양 끝이 모두 직선 $y = -1$ 위에 있으므로, P를 이 직선을 축으로 회전시키면 닫힌 곡면이 만들어진다. 이 곡면이 둘러싸는 입체는 P와 $y = -1$ 사이의 색칠한 영역을 회전시켜 얻는 입체와 정확히 같다. 위치 x에서 자른 단면은 반지름이

$$y - (-1) = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)\ (\geq 0, \text{단} |x| \leq 1).$$

인 원판이다. 따라서

$$V = \pi \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x = 8\pi \int_{0}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x$$
$$= 8\pi\left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = 8\pi \cdot \tfrac{8}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

검산

- $\theta = 0$일 때 $(0,1)$, $\theta = \pm\pi/2$일 때 $(\pm 1, -1)$을 얻으며, 이는 $y = 1 - 2x^2$와 일치한다.
- 길이 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4 \approx 4.6468$은 $(\pm 1, -1)$에서 $(0,1)$까지의 두 현(chord)의 길이의 합 $2\sqrt{5} \approx 4.472$보다 조금 커야 한다. 실제로 그렇다. 또한 $[-\pi/2, \pi/2]$에서 $\int \sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$를 중점 규칙(midpoint rule)으로 계산해도 4.64678이 나온다.
- 파푸스(Pappus)의 정리: 영역의 넓이는 $\int_{-1}^{1}(2 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$이고, 무게중심(centroid)은 축에서 $\frac{4}{5}$만큼 위에 있다. 따라서 $V = 2\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{15} \approx 13.404$이며, 이 값 역시 수치 적분(numerical integration) 결과와 일치한다.

흔한 실수

- 실수로 x축을 축으로 회전시켜 반지름으로 $y + 1$ 대신 y를 쓰는 것.
- $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u$에서 나오는 인수 $\frac{1}{4}$를 빠뜨리거나, $\sinh 2\alpha$를 $2\sinh\alpha\cosh\alpha = 8\sqrt{17}$로 정리하지 않고 그대로 두는 것.

STEP 너머

곡선의 길이(arc length)는 곡선의 미분기하학(differential geometry)을 처음 엿보는 창이다. 곡선 위의 위치를 호의 길이 s로 나타내면 속력은 항상 1이고, s에 따라 방향이 얼마나 빨리 바뀌는지를 나타내는 양이 **곡률**(*curvature*)이다. 포물선 $y = 1 - 2x^2$의 곡률은 꼭짓점에서 가장 크다. 위와 같은 쌍곡선 함수 치환은 대학 1학년 미적분학 곳곳에 등장한다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 유형의 문제가 훨씬 더 많이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.