풀이

STEP II 1993, 문제 9

순수수학 • 복소수의 편각

> **STEP II 1993, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q9

핵심 아이디어

$0 \leq \arg z < 2\pi$라는 규약 아래에서 "허수부(imaginary part)가 양수"라는 말은 "편각(argument)이 0과 π 사이에 있다(양 끝 제외)"는 뜻이다. 복소수의 덧셈은 벡터(vector)의 덧셈이고, 모두 같은 열린 반평면(open half-plane) 안을 향하는 벡터들의 합은 그 반평면 안에 머문다. z_1이나 z_3이 실수축 위에 놓이도록 회전시키면 주어진 부등식은 바로 이 사실이 된다. 마지막 부분에서는 곱의 편각이 편각들의 합(2π의 정수배 차이를 무시하면)이라는 사실을 쓰고, 앞에서 증명한 부등식으로 그 차이를 0과 2π 사이(양 끝 제외)에 가둔다.

풀이

양의 허수부

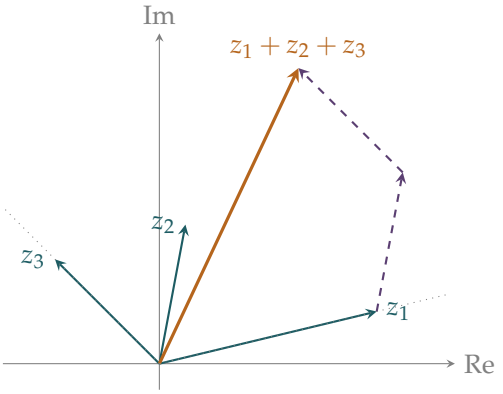
$r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$에 대하여 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$라 하자. 그러면 $\operatorname{Im} z = r\sin\theta > 0$인 것은 정확히 $\sin\theta > 0$일 때이고, $[0, 2\pi)$에서 이는 정확히 다음일 때 일어난다.

$$0 < \arg z < \pi.$$

따라서 z는 위쪽 반평면에 있고, 그 편각은 결코 0이나 π가 아니다(그렇다면 z는 실수가 된다).

그림

$\theta_k = \arg z_k$라 쓰면 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$이다. z_1, z_2, z_3을 원점에서 출발하는 화살표로 그린 다음, 이들을 꼬리에 머리를 이어 붙여 $z_1 + z_2 + z_3$에 이른다.



경로의 각 단계는 바로 앞 단계에 비해 시계 반대 방향으로 꺾이고($\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$이므로), 모든 단계는 위쪽 반평면을 향한다. 경로는 각 θ_1의 반직선을 따라 출발한 뒤 그 왼쪽으로 꺾이므로, 끝점은 그 반직선보다 엄밀하게 시계 반대 방향 쪽에 있다. 반대쪽 끝에서 돌아보면, 경로는 각 θ_3인 단계로 끝나고 그 앞의 모든 것은 각 θ_3의 반직선보다 시계 방향 쪽에 있다. 따라서 합은 각 θ_1과 θ_3의 두 반직선 사이의 쐐기 영역에 놓인다.

이를 엄밀하게 하기 위해, 모든 것을 시계 방향으로 θ_1만큼 회전시키는 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$을 곱한다.

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}(z_1 + z_2 + z_3) = r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} + r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\theta_1)},$$

여기서 $r_k = |z_k| > 0$이다. 첫째 항은 양의 실수이고, 나머지 두 항은 각이 $(0, \pi)$에 있으므로 허수부가 양수이다. 따라서 우변은 허수부가 양수이고, 그 편각 α는 $0 < \alpha < \pi$를 만족한다. 그러므로 $z_1 + z_2 + z_3$은 편각 $\theta_1 + \alpha$를 가지며, $\theta_1 < \theta_1 + \alpha < \theta_1 + \pi < 2\pi$이므로 이것이 바로 $[0, 2\pi)$ 범위의 편각이다. 따라서 $\arg(z_1 + z_2 + z_3) > \theta_1$이다.

마찬가지로 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_3}$을 곱하면 $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_3)} + r_3$을 얻는데, 앞의 두 각은 $(-\pi, 0)$에 있으므로 이 수는 허수부가 음수이고 $0 < \beta < \pi$인 β에 대하여 $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$로 쓸 수 있다. 그러면 $z_1 + z_2 + z_3 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\beta)}$이고, 여기서 $-\pi < \theta_3 - \beta < \theta_3 < \pi$이다. 합은 허수부가 양수이므로 그 편각은 $(0, \pi)$에 있고 $\theta_3 - \beta$와는 2π의 정수배만큼 차이 난다. 두 수 모두 길이가 2π인 구간 $(-\pi, \pi)$에 있으므로 두 수는 같다. 따라서 $\arg(z_1 + z_2 + z_3) = \theta_3 - \beta < \theta_3$이고, 종합하면 다음과 같다.

$$\arg z_1 < \arg(z_1 + z_2 + z_3) < \arg z_3.$$

곱과 합

$\varphi = \arg(z_1 + z_2 + z_3)$라 하면, 앞 부분에 의해 $\theta_1 < \varphi < \theta_3$이다. 복소수를 곱하면 편각이 더해지므로

$$z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)},$$

이고, $\arg(z_1z_2z_3)$는 $[0, 2\pi)$에 있으면서 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$과 2π의 정수배만큼 차이 나는 수이다.

생각해 보기 합 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$은 $(0,3\pi)$의 어디에든 있을 수 있으므로, 2π의 몇 배를 빼야 하는지 알 수 없다. 그것을 알 필요가 없게 하려면 어떻게 해야 할까?

알 필요가 없다. 필요한 것은 $\arg(z_1z_2z_3)=\varphi$라면

$$D=\theta_1+\theta_2+\theta_3-\varphi$$

가 2π의 정수배라는 사실뿐이다. 이제 $\theta_1<\varphi<\theta_3$을 이용하여 D의 범위를 잡는다.

$$D>\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_3=\theta_1+\theta_2>0,$$
$$D<\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_1=\theta_2+\theta_3<2\pi,$$

첫째 줄에서는 $\theta_k>0$을, 둘째 줄에서는 $\theta_k<\pi$를 이용하였다. 따라서 $0<D<2\pi$이고, 0과 2π 사이(양 끝 제외)에는 2π의 정수배가 없다. 그러므로 $\arg(z_1z_2z_3)$는 결코 $\arg(z_1+z_2+z_3)$와 같지 않다.

검산

그림의 예인 $z_1=2.5+0.6\mathrm{i}$, $z_2=0.3+1.6\mathrm{i}$, $z_3=-1.2+1.2\mathrm{i}$에서 편각은 각각 약 0.236, 1.385, 2.356이고, $\arg(z_1+z_2+z_3)=\arg(1.6+3.4\mathrm{i})\approx1.131$로 첫째와 마지막 편각 사이에 있다. 임의로 뽑은 200 000개의 세 쌍(절댓값(modulus)은 e^{-4}과 e^4 사이)으로 시험해 본 결과, 두 부등식과 $0<D<2\pi$가 매번 성립했고 곱과 합은 한 번도 같은 방향을 가리키지 않았다.

위쪽 반평면이 왜 중요한지 보려면, 순서 조건을 등호까지 허용하도록 느슨하게 하여 $z_1=z_2=z_3=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$을 시도해 보자. 곱은 1이고 합은 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 방향을 가리키며, 이는 $D=4\pi/3$과 일치한다. 세 각을 모두 π에 가까이 보내면 D는 2π에 가까워지므로, $\theta_k<\pi$라는 조건이 실제로 중요한 역할을 한다.

흔한 실수

- $\arg(z_1z_2z_3)=\theta_1+\theta_2+\theta_3$이라고 바로 쓰는 것: 합이 2π 이상이면 언제나 틀린 식이다. 쓸 수 있는 것은 2π를 법으로 하는 같음뿐이다.
- $\arg(z_1+z_2+z_3)$가 θ_k들의 일종의 평균이라고 주장하는 것. 그렇지 않다(절댓값이 영향을 준다). 참인 것은 그것이 θ_1과 θ_3 사이(양 끝 제외)에 있다는 사실뿐이다.

STEP 너머

첫째 사실은 열린 반평면(실은 각이 π보다 작은 모든 쐐기 영역)이 **볼록뿔**(*convex cone*)이라는 명제이다. 즉 그 안의 벡터들의 양의 일차결합은 그 안에 머문다. 볼록뿔은 선형계획법(linear programming)과 최적화(optimisation)에서 핵심적이며, 마지막 부분에서 피해 간 arg의 다가성(multivaluedness)은 복소해석학(complex analysis) 첫 강좌에서 분지 절단(branch cut)과 복소로그(complex logarithm)로 이어진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 두 아이디어를 모두 아름답게 기하학적으로 다룬 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.