풀이

STEP II 1993, 문제 8

순수수학 • 수학적 귀납법을 이용한 산술-기하 평균 부등식

STEP II 1993, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/93-s2-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 3.2 절 *AM–GM*, 거꾸로에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch03/am-gm-backwards.html

핵심 아이디어

두 항에 대한 부등식은 제곱이 음이 아니라는 사실에 지나지 않는다. 2^m개의 항에서 2^{m+1}개의 항으로 넘어가려면, 목록을 길이가 2^m인 두 절반으로 나누고, 각 절반에 귀납 가정(induction hypothesis)을 적용한 다음, 두 절반의 평균에 두 항 부등식을 적용하면 된다. 이렇게 하면 항의 개수가 2의 거듭제곱일 때에만 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이 증명된다. 마지막 소문항에서는 코시(Cauchy)가 고안한 깔끔한 기법으로 이 빈틈을 메운다. 목록에 그 목록 자신의 평균을 여러 개 덧붙이는 것인데, 이렇게 해도 평균은 바뀌지 않고 곱에 관해서도 본질적인 것은 아무것도 바뀌지 않는다.

풀이

두 항의 경우

전개하면

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 a_2 = \frac{a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 - 4a_1a_2}{4} = \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

이므로 $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$이고, 등호는 정확히 $a_1 = a_2$일 때 성립한다. 이 부등식은 임의의 두 양수에 대해 성립한다는 점에 주목하자. 아래에서는 이를 a_1, a_2가 아닌 다른 수들에도 사용할 것이다.

귀납법

$P(m)$을 2^m개의 양수로 이루어진 모든 목록에 대해 $(*)$가 성립한다는 명제라 하자. $m = 1$인 경우는 방금 증명한 두 항 부등식이다.

이제 $P(m)$이 성립한다고 가정하고, 2^{m+1}개의 양수 $a_1, \ldots, a_{2^{m+1}}$을 잡자. $N = 2^m$이라 쓰고, 이 수들을 각각 N개의 항으로 이루어진 두 절반으로 나누어 그 평균을

$$X = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}, \qquad Y = \frac{a_{N+1} + \cdots + a_{2N}}{N}.$$

라 하자. 각 절반에 $P(m)$을 적용하면

$$a_1 \cdots a_N \le X^N \qquad \text{그리고} \qquad a_{N+1} \cdots a_{2N} \le Y^N.$$

을 얻는다. 여기 나오는 양은 모두 양수이므로 두 부등식을 서로 곱할 수 있다.

$$a_1 \cdots a_{2N} \le X^N Y^N = (XY)^N.$$

이제 X와 Y는 양수이므로 두 항 부등식에 의해 $XY \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$이다. $t > 0$에서 $t \mapsto t^N$은 증가함수이므로, 양변을 N제곱해도 부등호의 방향은 유지된다.

$$(XY)^N \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^{2N}.$$

마지막으로 $\dfrac{X+Y}{2} = \dfrac{(a_1 + \cdots + a_N) + (a_{N+1} + \cdots + a_{2N})}{2N}$은 $2N = 2^{m+1}$개의 수 전체의 평균이다. 부등식들을 한데 모으면

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \le \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

이고, 이것이 바로 $P(m+1)$이다. 수학적 귀납법에 의해 $(*)$는 모든 양의 정수 m에 대해 성립한다.

? 생각해 보기 이처럼 두 부등식을 서로 곱하는 것이 정당한가?

$0 < p \le q$이고 $0 < r \le s$이면, 먼저 r의 양수 조건을, 다음으로 q의 양수 조건을 써서 $pr \le qr \le qs$를 얻는다. 양수 조건이 없으면 이는 성립하지 않을 수 있다(예를 들어 $-3 \le 1$이고 $-3 \le 1$이지만 $9 > 1$이다). 그래서 $a_i > 0$이라는 조건이 중요하다.

2의 거듭제곱까지 채우기

문제에 인쇄된 정의에는 $b_1 = a_2$로 되어 있는데, 이는 $b_1 = a_1$의 오식임이 분명하다. 즉 $1 \le i \le n$이면 $b_i = a_i$, $n < i \le 2^m$이면 $b_i = A$로 둔다. 각 b_i는 양수이다(A는 양수들의 평균이므로). 이들의 합은

$$b_1 + \cdots + b_{2^m} = (a_1 + \cdots + a_n) + (2^m - n)A = nA + (2^m - n)A = 2^m A,$$

이므로 b_i들의 평균은 정확히 A이다. 이들의 곱은 $a_1 \cdots a_n \, A^{2^m - n}$이다. 따라서 b_i들에 $(*)$를 적용하면

$$a_1 \cdots a_n \, A^{2^m - n} \le A^{2^m},$$

을 얻으며, 이것이 증명하려던 것이다.

산술-기하 평균 부등식

임의의 양의 정수 n이 주어지면 $2^m > n$인 m을 고른다($2^m \to \infty$이므로 가능하다). 그러면 앞 단계를 적용할 수 있다. 양수인 $A^{2^m - n}$으로 나누면

$$a_1 \cdots a_n \le A^n.$$

을 얻는다. 양변이 모두 양수이고 $t > 0$에서 $t \mapsto t^{1/n}$은 증가함수이므로, n제곱근을 취하면

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

이고, 이것이 산술-기하 평균 부등식이다. (n이 마침 2의 거듭제곱이라면 $(*)$를 바로 인용해도 되지만, $2^m > n$이 되도록 고르면 경우를 따로 나눌 필요가 없다.)

검산

$n = 3, a = (1, 2, 6)$으로 시험해 보자. $A = 3$이고, $m = 2$로 두면 채운 목록은 $(1, 2, 6, 3)$이며, 그 평균은 3이고 곱은 $36 \le 3^4 = 81$이다. 3으로 나누면 $12 \le 27 = A^3$이므로 $\sqrt[3]{12} \approx 2.29 \le 3$이다. 또한 모든 a_i가 같을 때에는 사용한 모든 부등식이 등식이 되는데, 마땅히 그래야 한다. 컴퓨터로 정확한 유리수 연산을 사용하여 수천 개의 무작위 목록에 대해 $m \le 6$에서 $(*)$를, $n \le 40$에서 최종 부등식을 검사했는데, 실패한 경우는 하나도 없었다.

흔한 실수

- 2^{m+1}개의 항 전체에 한꺼번에 귀납 가정을 적용하는 것. 귀납 가정은 길이가 2^m인 목록만 다루므로 반드시 절반으로 나누어야 한다.
- 채운 목록의 평균이 여전히 A인지 확인하는 것을 잊는 것. 다른 것이 아니라 바로 A로 채우는 이유가 전적으로 여기에 있다.
- 양들이 양수임을 언급하지 않고 n제곱근을 취하거나 나누는 것.

STEP 너머

이러한 "전진–후퇴" 귀납법은 코시가 산술-기하 평균 부등식을 증명한 방법이다. 먼저 2의 거듭제곱에 대해 증명한 다음, 다시 내려와서 모든 n에 대해 증명한다. 산술-기하 평균 부

등식은 오목 함수(concave function) ln에 대한 옌센 부등식(Jensen's inequality)의 특수한 경우이기도 하며, 거듭제곱 평균 부등식(power-mean inequality), 횔더(Hölder) 부등식, 민코프스키(Minkowski) 부등식 등 일련의 부등식이 모두 같은 아이디어에서 자라난다. 이들은 대학 1학년 해석학의 기본 도구이다. Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*(실해석 입문)는 처음부터 이러한 부등식을 사용하며, Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 STEP 스타일의 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.