풀이

STEP II 1993, 문제 7

순수수학 • 법 5에 대한 무한 강하법

> **STEP II 1993, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q7

핵심 아이디어

우변이 5의 배수이므로, 5를 법(modulo)으로 하여 생각하면 방정식이 유한한 몇 가지 경우만 확인하면 되는 문제로 바뀐다. 제곱수는 5를 법으로 $0, 1, 4 \pmod 5$ 중 하나뿐이기 때문이다. a와 b가 5의 배수일 수밖에 없음을 보이고 나면, 방정식에 의해 c도 5의 배수가 되고, 모든 수를 5로 나누면 **더 작은** 해가 얻어진다. 0이 아닌 정수를 5로 끝없이 나눌 수는 없으므로, 이것이 바로 페르마(Fermat)의 무한 강하법(method of infinite descent)이다.

풀이

a와 b가 5로 나누어떨어짐

5를 법으로 하는 각 나머지(residue)를 제곱하면 다음과 같다.

$x \pmod 5$	0	1	2	3	4
$x^2 \pmod 5$	0	1	4	4	1
$2x^2 \pmod 5$	0	2	3	3	2

따라서 $b^2 \equiv 0, 1$ 또는 4이고, $2a^2 \equiv 0, 2$ 또는 $3 \pmod 5$이다. $5c^2 \equiv 0 \pmod 5$이므로

$$2a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

이어야 한다. 이제 가능한 모든 조합을 나열한다.

$2a^2 + b^2$	$b^2 \equiv 0$	$b^2 \equiv 1$	$b^2 \equiv 4$
$2a^2 \equiv 0$	**0**	1	4
$2a^2 \equiv 2$	2	3	1
$2a^2 \equiv 3$	3	4	2

값이 0인 칸은 $2a^2 \equiv 0$이고 $b^2 \equiv 0$인 경우 하나뿐이다. 첫 번째 표에서 $x^2 \equiv 0 \pmod 5$가 되는 것은 $x \equiv 0$일 때뿐이다(같은 말로, 5는 소수(prime)이므로 $5 \mid x^2$이면 $5 \mid x$이다). 그러므로 $a \equiv 0$이고 $b \equiv 0 \pmod 5$이다. 즉 a와 b는 모두 5로 나누어떨어지며, 이것이 보이려던 것이다.

유일한 해는 $a = b = c = 0$

정수 p, q에 대하여 $a = 5p, b = 5q$로 놓는다. 이를 대입하면

$$25(2p^2 + q^2) = 5c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 5(2p^2 + q^2).$$

따라서 $5 \mid c^2$이고, 5는 소수이므로 $5 \mid c$이다. $c = 5r$로 놓으면 $25r^2 = 5(2p^2 + q^2)$, 즉

$$2p^2 + q^2 = 5r^2.$$

이다. 이것은 처음 방정식과 똑같다. 그러므로 (a, b, c)가 해이면 세 수 모두 5로 나누어떨어지고, $(a/5,\ b/5,\ c/5)$도 정수해가 된다.

> **생각해 보기** "5로 계속 나눌 수 있다"는 사실이 왜 모든 수가 0이어야 함을 뜻하는가?

이 단계를 반복해서 적용한다. 해 (a, b, c)에서 출발하여 n번 반복하면 정수해 $(a/5^n,\ b/5^n,\ c/5^n)$를 얻으므로, **모든** $n \geq 1$에 대하여 5^n이 a, b, c 각각을 나눈다.

그런데 0이 아닌 정수 m은 5로 유한한 횟수만큼만 나눌 수 있다. $5^n \mid m$이고 $m \neq 0$이면 $5^n \leq |m|$이어야 하는데, n이 충분히 크면 이 부등식은 성립하지 않는다. 따라서 a, b, c 중 어느 것도 0이 아닐 수 없다.

같은 내용을 강하법 논증으로 쓰면 다음과 같다. $c \neq 0$인 해가 존재한다고 가정하고, 그중 $|c|$가 양수이면서 가장 작은 해를 하나 고른다. 그러면 $(a/5, b/5, c/5)$는 $0 < |c/5| < |c|$를 만족하는 해이므로 모순이다. 따라서 $c = 0$이고, 그러면 두 항이 모두 음이 아니므로 $2a^2 + b^2 = 0$에서 $a = b = 0$이다.

그러므로 유일한 정수해는 $a = b = c = 0$이다.

검산

- 5를 법으로 하는 나머지 쌍 $(a, b) \bmod 5$ 25개를 모두 확인해 보면, $2a^2 + b^2 \equiv 0$이 되는 것은 $(0, 0)$뿐이다.
- $|a|, |b| \leq 300$인 모든 경우를 컴퓨터로 탐색해도 $a = b = c = 0$ 이외에는 $2a^2 + b^2 = 5c^2$의 해가 없다.

- $a^2 + b^2 = 5c^2$와 비교해 보자. 이 방정식은 $(1, 2, 1)$과 같은 자명하지 않은(non-trivial) 해를 가진다. 여기서는 $1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$이므로 첫 부분의 나머지 논증이 성립하지 않으며, 이는 당연히 그래야 하는 결과이다.

흔한 실수

- $5 \mid a^2$에서 이유 없이 $5 \mid a$라고 결론 내리는 것. 이는 5가 소수이기 때문에(또는 표에 의해) 참이지만, 그 이유를 밝혀야 한다.
- c도 5로 나누어떨어진다는 것을 보이지 않는 것. 이것이 없으면 $(a/5, b/5, c/5)$가 정수해라는 보장이 없고, 강하법을 시작할 수 없다.
- "다시 5로 나눌 수 있다"에서 멈추는 것. 반복된 나눗셈이 왜 0을 강제하는지 설명해야 증명이 완성된다.

STEP 너머

이것은 페르마의 **무한 강하법**으로, $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하거나 $x^4 + y^4 = z^2$이 자명하지 않은 해를 갖지 않음을 증명할 때 쓰는 것과 같은 방법이다. $2a^2 + b^2 = 5c^2$과 같은 방정식은 정수론(number theory)에서 체계적으로 연구된다. 르장드르(Legendre)의 정리는 $Ax^2 + By^2 = Cz^2$이 자명하지 않은 정수해를 가질 정확한 조건을 이차잉여(quadratic residue)를 써서 제시한다. 이 문제에서 해를 막는 장애물은 -2가 5를 법으로 제곱수가 아니라는 점이다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식, 이차잉여, 강하법을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.