풀이

STEP II 1993, 문제 6

순수수학 • 행렬 대수의 반례

> **STEP II 1993, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q6

이 문제는 *Beyond STEP*의 7.1 절 **행렬에서는 성립하지 않는 법칙**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch07/matrix-rules.html

핵심 아이디어

각 명제는 실수에 대해서라면 참이 되는 내용이므로, 이 문제는 사실상 보통의 대수에서 익숙한 습관 가운데 어떤 것이 행렬(matrix)에서도 살아남는지를 묻고 있다. 두 가지가 무너진다. 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않을 수 있고(commute), 영이 아닌 두 행렬의 곱이 영이 될 수 있다. 잘 고른 아주 간단한 행렬 한 쌍이면 (i)과 (ii)가 해결되고, 수반행렬(adjugate matrix)로 (iii)이 해결되며, 멱영(nilpotent)이라는 반전이 들어간 중근("root")으로 (iv)가 해결된다.

풀이

이 풀이 전체에서 $\mathbf{I}$는 2×2 단위행렬(identity matrix)이고 $\mathbf{0}$은 영행렬(zero matrix)이다.

소문항 (i)

거짓. 다음과 같이 두자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

둘 다 영행렬이 아니다. 그러면

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

생각해 보기 이런 반례(counterexample)를 그냥 추측하는 대신 어떻게 찾아낼 수 있을까?

우리는 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이기를 원하므로, $\mathbf{B}$의 모든 열은 $\mathbf{A}$에 의해 소멸되어야 한다. 위의 행렬 $\mathbf{A}$는 $(0, y)^{\mathsf{T}}$ 꼴의 벡터(vector)를 모두 소멸시키므로, $\mathbf{B}$의 열을 그런 꼴로 잡으면 된다. 그다음에는 $\mathbf{BA}$가 우연히 영이 되는지만 확인하면 된다. 가장 자연스러운 선택에서는 영이 되지 않는다.

소문항 (ii)

거짓. 모든 곱의 순서를 지키면서 조심스럽게 전개하면

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2,$$

이므로, 이 명제는 정확히 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$일 때 성립한다. 소문항 (i)의 행렬들은 교환되지 않으므로 반례가 된다. 그 경우 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$이다. 구체적으로 계산하면

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

이다. 여기서 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$와 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$을 이용하였다.

소문항 (iii)

참. 양쪽 방향을 모두 증명(proof)한다.

$\mathbf{AX} = \mathbf{0}$이 영이 아닌 해를 가지면 $\det \mathbf{A} = 0$이다. 대우(contrapositive)를 증명한다. $\det \mathbf{A} \neq 0$이라고 하자. 그러면 $\mathbf{A}^{-1}$이 존재하고, $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$으로부터 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$을 얻는다. 따라서 해는 영행렬뿐이다.

$\det \mathbf{A} = 0$이면 영이 아닌 해가 존재한다. 다음과 같이 쓰자.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(즉 $\mathbf{X}$는 $\mathbf{A}$의 수반행렬이다). 곱을 계산하면

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\, \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{X}$의 성분은 $\mathbf{A}$의 성분을 재배열하고 일부의 부호를 바꾼 것이며, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$이다. 이로써 증명이 끝난다. 여기서 가정 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이 쓰였다는 점에 주목하자. 바로 이 가정이 수반행렬이 영이 아님을 보장한다.

소문항 (iv)

거짓. 수에 대해서는 이차방정식(quadratic)의 근이 많아야 두 개이지만, 그 사실의 증명에는 "$pq = 0$이면 $p = 0$ 또는 $q = 0$"이 쓰이며, 소문항 (i)에서 방금 보았듯이 이것은 행렬에서 성립하지 않는다. 그러므로 완전제곱(perfect square)으로 인수분해되는 이차식을 찾아보자. $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$로 두면 둘 다 영행렬이 아니다. $\mathbf{I}$는 모든 행렬과 교환되므로

$$\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2,$$

이고, 따라서 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$이면 된다. $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$을 만족하는 행렬 $\mathbf{N}$이라면 무엇이든 $\mathbf{X} - \mathbf{I}$로 쓸 수 있으며, 그런 행렬은 무수히 많다. 각 실수 t에 대하여

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

라 하자. 그러면

$$\mathbf{X}_t^2 - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

각 $\mathbf{X}_t$는 영행렬이 아니고, t의 값이 다르면 서로 다른 행렬이 된다. 따라서 이 방정식은 많아야 두 개가 아니라 무수히 많은 해를 가진다.

> ? **생각해 보기** $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{I}$에 특별한 점이 있을까?

그렇지 않다. $\mathbf{A} = -2\lambda\mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{I}$로 두면 (단, $\lambda \neq 0$은 임의), $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$인 모든 $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$이 해가 된다. 멱영행렬 자체도 큰 집합을 이룬다. 모든 실수 p, q에 대하여 $\begin{pmatrix} pq & -p^2 \\ q^2 & -pq \end{pmatrix}$를 제곱하면 $\mathbf{0}$이 된다. 본질적인 점은 오직 이차식이 두 행렬의 곱으로 인수분해된다는 것이며, 그런 곱은 수의 경우보다 훨씬 다양한 방식으로 영이 될 수 있다.

검산

각 반례를 손으로 직접 곱해 보자. (i)에서 $\mathbf{AB}$는 모든 성분이 0이지만 $\mathbf{BA}$는 왼쪽 아래 구석에 1이 있다. 항등식 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$는 무작위 정수 행렬 쌍 1000개에 대해 확인하였고, $\operatorname{adj}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이면서 $\mathbf{A}\operatorname{adj}\mathbf{A} = \mathbf{0}$임은 무작위 특이행렬(singular matrix) 2000개에 대해 확인하였다. (iv)에서는 $t = 3$을 대입해 보자. $\mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이고, $\mathbf{X}_3^2 - 2\mathbf{X}_3 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$이다.

흔한 실수

- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$인 것처럼 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$를 전개하는 것. (ii)에서 구체적인 반례 없이 "거짓"이라고만 쓰면 점수를 거의 받지 못한다. 문제가 반례를 요구하기 때문이다.
- (iii)에서 "필요충분조건(if and only if)"의 한쪽 방향만 증명하는 것.
- (iv)에서 근의 공식이나 인수분해로 이차방정식을 "풀어서" $\mathbf{X} = \mathbf{I}$가 유일한 근이라고 결론짓는 것. 인수분해 자체는 괜찮지만, $\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$이라고 해서 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$인 것은 아니다.

STEP 너머

2×2 실수 행렬 전체는 **영인자를 가진 비가환환**(non-commutative ring with zero divisors)을 이루며, 이 문제의 각 소문항은 체(field)에서는 성립하지만 그런 환에서는 성립하지 않는 법칙을 하나씩 시험한다. 소문항 (iii)은 선형대수학(linear algebra)의 핵심 정리의 2×2 경우이다. 즉 정사각행렬이 자명하지 않은 영공간(null space)을 가질 필요충분조건은 그 행렬식(determinant)이 영이 되는 것이다. (iv)에 나온 것처럼 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$을 만족하는 행렬을 멱영행렬이라 하며, 이는 조르당 표준형(Jordan normal form)의 핵심 재료이다. 선형대수학은 Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)에서, 환론은 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.